Minste kvadraters løsning

La A være en $m \times n$-matrise og $\mathbf{b}$ en vektor i $\mathbb{R}^m$. En **minste kvadraters løsning** av systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er en vektor $\hat{\mathbf{x}}$ i $\mathbb{R}^n$ slik at

$$\text{dist}(\mathbf{b}, A\hat{\mathbf{x}}) \leq \text{dist}(\mathbf{b}, A\mathbf{x})$$

for alle $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$.

La $\hat{\mathbf{b}} = \text{proj}_{\text{Col}\, A}\, \mathbf{b}$. Da har vi $A\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{b}}$. Fra dette kan vi utlede følgende:

Teorem

En vektor $\hat{\mathbf{x}}$ er en minste kvadraters løsning av systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hvis og bare hvis $A^{\mathsf{T}} A\hat{\mathbf{x}} = A^{\mathsf{T}}\mathbf{b}$.

Lineære modeller

Hvis vi vil finne en rett linje $y = \beta_0 + \beta_1 x$ som går gjennom alle punktene $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, kan vi løse likningssystemet

$$\begin{aligned} \beta_0 + \beta_1 x_1 &= y_1 \\ \beta_0 + \beta_1 x_2 &= y_2 \\ &\vdots \\ \beta_0 + \beta_1 x_n &= y_n \end{aligned}$$

for β_0 og β_1.

Hvis punktene ikke ligger nøyaktig på en rett linje, har systemet ingen løsning. Kan bruke minste kvadraters løsning for å finne en rett linje som passer best mulig.

Lineære modeller

- Vi vil finne en rett linje som passer best mulig til punktene $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.
- Koeffisientmatrisen X og høyresiden $\mathbf{y}$ til det aktuelle likningssystemet er:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

- La $\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$ være minste kvadraters løsning av $X\beta = \mathbf{y}$.
- Da er $y = \beta_0 + \beta_1 x$ den linjen som passer best til punktene.

Dagens pensum

— **Lay 6.5** *Least-Squares Problems*, s. 378–383

— **Lay 6.6** *Applications to Linear Models*, s. 386–391