Potenser av komplekse tall

- La $z = re^{i\theta}$ være et komplekst tall på polarform.
- Da er $z^n = r^n e^{i(n\theta)}$ for alle naturlige tall n.

Eksempel

La $z = -1 + i$. Hva er z^{20}?
Skriver z på polarform: $z = \sqrt{2}e^{i(3\pi/4)}$. Får:

$$z^{20} = \sqrt{2}^{20} e^{i(3\pi/4)\cdot 20} = 1024e^{i\cdot 15\pi} = 1024e^{i\pi} = -1024$$

Røtter av komplekse tall

Gitt komplekst tall w og naturlig tall n, vil finne z slik at

$$z^n = w$$

For å løse likningen:

— Skriv w på polarform: $w = re^{i\theta}$

— Da er $z = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i(\theta/n)}$ en løsning

Flere muligheter for θ (kan alltid legge til 2π) gir flere løsninger.

Røtter av komplekse tall

Gitt komplekst tall $w \neq 0$ og naturlig tall n. Likningen

$$z^n = w$$

har n forskjellige løsninger:

$$z = \sqrt[n]{|w|} \cdot e^{i(\operatorname{Arg} w + 2\pi k)/n} \qquad \text{for } k \in \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$$

Bruker løsningen med $k = 0$ som definisjon av n-teroten:

Definisjon

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|} e^{i(\operatorname{Arg} w)/n}$$

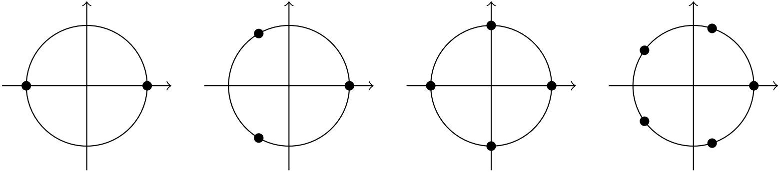
Eksempler: $\sqrt{-1} = i, \quad \sqrt[3]{8e^{i(3\pi/4)}} = 2e^{i\pi/4}$

(Merk: Boken definerer $\sqrt[n]{w}$ til å bety *alle* løsningene av $z^n = w$.)

Enhetsrøtter

Definisjon

En løsning av likningen $z^n = 1$ kalles en *n-te enhetsrot*.



$z^2 = 1$ $z^3 = 1$ $z^4 = 1$ $z^5 = 1$

Andregradslikninger

Gitt komplekse tall a, b og c, vil finne komplekst tall z slik at

$$az^2 + bz + c = 0$$

Kan bruke den vanlige formelen:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Algebraens fundamentalteorem

For ethvert polynom $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ finnes et komplekst tall z slik at $P(z) = 0$.

Ferdig med komplekse tall

— Nå er vi ferdige med delen om komplekse tall i faget

— Har gått gjennom hele utdraget av Saff–Snider: *Fundamentals of Complex Analysis Engineering, Science and Mathematics*

— Neste forelesning: Differensiallikninger