

## Produkt av matrise og vektor

Produktet av en  $m \times n$ -matrise og en vektor i  $\mathbb{R}^n$  er definert slik:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \cdots + a_{mn}v_n \end{bmatrix}$$

Hvis  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  er kolonnene i matrisen, kan produktet også beskrives slik:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + \cdots + v_n\mathbf{a}_n$$

## Produkt av matrise og vektor: Eksempler



$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 7 + 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 \\ 1 \cdot 7 + 5 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 11 \\ 4 \cdot (-2) + 0 \cdot 11 \\ (-1) \cdot (-2) + 1 \cdot 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -8 \\ 13 \end{bmatrix}$$

# Regneregler for produkt av matrise og vektor



$$A \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$$

$$A \cdot (c\mathbf{u}) = c \cdot (A\mathbf{u})$$

## Ulike måter å skrive likningssystem på

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m$$

Likningssystem

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \cdots x_n \mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

Vektorlikning

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Matriselikning



## Eksempel: Likningssystem skrevet på ulike måter

Likningssystem:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= 7 \\ -2x_1 + 5x_2 &= 4 \\ -5x_1 + 6x_2 &= -3\end{aligned}$$

Vektorlikning:

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Matriselikning:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

## Når finnes det løsninger?



### Teorem

La  $A$  være en  $m \times n$ -matrise. Følgende påstander er ekvivalente:

1. Likningen  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  er løsbart for alle vektorer  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ .
2. Hver  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  er en lineærkombinasjon av kolonnene i  $A$ .
3. Mengden utspent av kolonnene i  $A$  er hele  $\mathbb{R}^m$ .
4. Gausseliminering av  $A$  gir ingen nullrader.

# Homogene systemer



- Et likningssystem er *homogent* hvis alle likningene har 0 på høyresiden, altså hvis det kan skrives som en matriselikning på formen  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .
- Et homogent likningssystem har alltid minst én løsning: den *trivielle* løsningen  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .
- En løsning  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  kalles *ikke-triviell*.
- Systemet har ikke-trivielle løsninger hvis og bare hvis vi får minst én fri variabel når vi løser det.

# Ikkehomogene systemer



Anta at  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  har en løsning  $\mathbf{x} = \mathbf{p}$ . Da er enhver løsning av  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  på formen

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_h,$$

der  $\mathbf{v}_h$  er en løsning av det homogene systemet  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .



## Dagens pensum



- **1.4** *The Matrix Equation  $Ax = \mathbf{b}$* , s. 51–56
- **1.5** *Solution Sets of Linear Systems*, s. 59–63
- **1.6** *Applications of Linear Systems*, s. 66–70  
(ikke gjennomgått, les selv)