Lineær uavhengighet

Definisjon

Vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ i $\mathbb{R}^m$ er *lineært uavhengige* hvis likningen

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

ikke har noen andre løsninger enn den trivielle løsningen
$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Ellers kalles de *lineært avhengige*.

Lineær uavhengighet for kolonnene i en matrise

Teorem

La A være en matrise. Følgende påstander er ekvivalente:

1. *Kolonnene i A er lineært uavhengige.*
2. *Likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har kun den trivielle løsningen.*
3. *Vi får ingen frie variabler når vi løser $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.*
4. *Når vi gausseliminerer A, får vi et lederelement i hver kolonne.*

Generell fremgangsmåte for å sjekke lineær uavhengighet

Gitt vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ i $\mathbb{R}^m$. For å sjekke om de er lineært uavhengige:

1. Lag en matrise $A = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \ldots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}$ med disse vektorene som kolonner.
2. Gausseliminer A til trappeform.
3. Hvis hver kolonne inneholder et lederelement, er vektorene lineært uavhengige. Ellers er de lineært avhengige.

Lineær uavhengighet: Oppgave 1

Er disse vektorene lineært uavhengige?

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 8 \\ 31 \\ 12 \\ 22 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 9 & 7 & 31 \\ 3 & 2 & 12 \\ 3 & 4 & 22 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Det er lederelementer i alle kolonner. Dermed er $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ lineært uavhengige.

Lineær uavhengighet: Oppgave 2

Er disse vektorene lineært uavhengige?

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 10 & 7 & 6 \\ 5 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Siste kolonne har ikke noe lederelement. Dermed er $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ lineært avhengige.

Lineær uavhengighet: Oppgave 3

Er disse vektorene lineært uavhengige?

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 14 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 14 & 3 & 7 \\ 7 & -2 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 0 & 11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

Kan ikke få lederelement i alle kolonnene. Dermed er $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ og $\mathbf{v}_4$ lineært avhengige.

Lineær uavhengighet: Oppgave 4

Er disse vektorene lineært uavhengige?

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ -12 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$1 \cdot \mathbf{v}_1 - 2 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

Vektorene $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er lineært avhengige.

Lineær uavhengighet for to vektorer

Teorem

To vektorer $\mathbf{v}_1$ *og* $\mathbf{v}_2$ *er lineært uavhengige hvis og bare hvis ingen av dem er lik en skalar ganger den andre.*

Med andre ord: De er lineært uavhengige hvis de ikke ligger på en rett linje gjennom origo.

For to vektorer i $\mathbb{R}^2$ er det to muligheter: Enten er de lineært avhengige, eller så utspenner de hele $\mathbb{R}^2$.

Når er vektorer lineært avhengige?

Teorem

Gitt n vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ i $\mathbb{R}^m$. Hvis

1. *en av vektorene er en lineærkombinasjon av de andre, eller*
2. *en av vektorene er $\mathbf{0}$, eller*
3. *$n > m$,*

så er vektorene lineært avhengige.

n **vektorer i** $\mathbb{R}^n$

Teorem

Gitt n vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ i $\mathbb{R}^n$. Da er de lineært uavhengige hvis og bare hvis de utspenner hele $\mathbb{R}^n$, altså hvis og bare hvis

$$\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} = \mathbb{R}^n.$$

Lineærtransformasjoner

Definisjon

En funksjon $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er en *lineærtransformasjon* hvis

1. $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ for alle $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$.
2. $T(c \cdot \mathbf{u}) = c \cdot T(\mathbf{u})$ for alle $\mathbf{u}$ i $\mathbb{R}^n$ og c i $\mathbb{R}$.

Dagens pensum

— **1.7** *Linear Independence*, s. 72–77

— **1.8** *Introduction to Linear Transformations*, s. 79–85