# Lineærtransformasjoner

## Definisjon

En funksjon $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er en *lineærtransformasjon* hvis

1. $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ for alle $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$.
2. $T(c \cdot \mathbf{u}) = c \cdot T(\mathbf{u})$ for alle $\mathbf{u}$ i $\mathbb{R}^n$ og $c$ i $\mathbb{R}$.

# Lineærtransformasjoner gitt ved matriser

La $A$ være en $m \times n$-matrise. Kan definere en funksjon $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ved:

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

Da er $T$ en lineærtransformasjon:

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A \cdot \mathbf{u} + A \cdot \mathbf{v} = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$
$$T(c \cdot \mathbf{u}) = A \cdot (c \cdot \mathbf{u}) = c \cdot (A \cdot \mathbf{u}) = c \cdot T(\mathbf{u})$$

# Eksempel

- La $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være gitt ved $T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$.
- Hva er virkningen av $T$?
- $T$ roterer alle vektorer en kvart omdreining til venstre.

# Identitetsmatriser

*Identitetsmatrisen* $I_n$ er $n \times n$-matrisen med 1-ere langs diagonalen og 0 ellers:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Kolonnene i $I_n$ er lineært uavhengige og utspenner $\mathbb{R}^n$.

# Matrisen til en lineærtransformasjon

## Teorem

*La* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *være en lineærtransformasjon.*
*Da finnes det en matrise* $A$ *slik at*

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad \textit{for alle } \mathbf{x} \textit{ i } \mathbb{R}^n.$$

*Matrisen* $A$ *er entydig bestemt av* $T$*, og er gitt ved*

$$A = \begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & \cdots & T(\mathbf{e}_n) \end{bmatrix},$$

*der* $\mathbf{e}_j$ *er* $j$*-te kolonne i identitetsmatrisen* $I_n$*.*

## Definisjon

Matrisen $A$ i teoremet kalles *standardmatrisen* til $T$.

# På og en-til-en

## Definisjon

La $f\colon A \to B$ være en funksjon. Vi sier at $f$ er

- *på* hvis det for hver $b \in B$ finnes en $a \in A$ slik at $f(a) = b$,
- *en-til-en* hvis det for hver $b \in B$ er maksimalt én $a \in A$ slik at $f(a) = b$.

## Teorem

*La $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være en lineærtransformasjon med standardmatrise $A$.*

1. *$T$ er på hvis og bare hvis kolonnene i $A$ utspenner $\mathbb{R}^m$.*
2. *$T$ er en-til-en hvis og bare hvis kolonnene i $A$ er lineært uavhengige.*

# Dagens pensum

— **1.8** *Introduction to Linear Transformations*, s. 79–85

— **1.9** *The Matrix of a Linear Transformation*, s. 87–94