Systemer av lineære differensiallikninger

$$
\begin{aligned}
x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\
x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\
&\vdots \\
x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n
\end{aligned}
$$

Koeffisientene a_{ij} er konstanter. Hver x_i er en ukjent funksjon av t.

Vektorfunksjoner

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad \text{Da er} \quad \mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix}$$

Kan skrive systemet

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{aligned}$$

som $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.

Eksempel

$$x_1' = 2x_1 + 0x_2$$
$$x_2' = 0x_1 - 5x_2$$

Løsning:

$$x_1(t) = c_1 e^{2t} \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{2t} \\ c_2 e^{-5t} \end{bmatrix}$$
$$x_2(t) = c_2 e^{-5t}$$

Løsning ved diagonalisering

— Gitt system $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, der A diagonaliserbar: $A = PDP^{-1}$.

— Får $\mathbf{x}' = PDP^{-1}\mathbf{x}$.

— Gang med P^{-1} på begge sider: $P^{-1}\mathbf{x}' = DP^{-1}\mathbf{x}$

— La $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$. Da er $\mathbf{y}' = P^{-1}\mathbf{x}'$.

— Løs systemet $\mathbf{y}' = D\mathbf{y}$ (lett!)

— Finn $\mathbf{x}$ ved hjelp av $\mathbf{y}$-løsningen: $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$.

Løsning ved diagonalisering

Gitt system $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, der A diagonaliserbar $n \times n$-matrise, altså $A = PDP^{-1}$, der

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

($\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ er lineært uavhengige egenvektorer for A, og $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ er de tilhørende egenverdiene)

Da har systemet generell løsning

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n\mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}$$

Eksempel

Vil løse systemet

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Finner egenverdier og egenvektorer for matrisen $\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$:

$$\lambda_1 = 6 \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Generell løsning:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix} e^{6t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

Komplekse egenverdier

Hvis A diagonaliserbar med komplekse egenverdier/-vektorer, får vi kompleks generell løsning av $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.
Komplekse egenverdier $\lambda_1 = a + bi$ og $\lambda_2 = a - bi$ med egenvektorer $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ gir løsninger

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}$$
$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}$$

Da er $\operatorname{Re}\mathbf{x}_1$ og $\operatorname{Im}\mathbf{x}_1$ reelle løsninger:

$$\operatorname{Re}\mathbf{x}_1 = \big((\operatorname{Re}\mathbf{v}_1)(\cos bt) - (\operatorname{Im}\mathbf{v}_1)(\sin bt)\big)e^{at}$$
$$\operatorname{Im}\mathbf{x}_1 = \big((\operatorname{Re}\mathbf{v}_1)(\sin bt) + (\operatorname{Im}\mathbf{v}_1)(\cos bt)\big)e^{at}$$

Dagens pensum

— **Lay 5.7** *Applications to Differential Equations*, s. 329–335

— **Polking 4.2** *Second-Order Equations and Systems*, s. lxiv–lxvii