# Indreprodukt

**Indreproduktet** (eller **skalarproduktet** eller **prikkproduktet**) av to vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er definert som $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{u}^T\mathbf{v}$, altså:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots u_n v_n$$

# Egenskaper ved indreproduktet

**Teorem**

*For alle vektorer* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *og* $\mathbf{w}$ *i* $\mathbb{R}^n$ *og alle reelle tall* $c$ *har vi:*

1. $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{u}$
2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \bullet \mathbf{w} = \mathbf{u} \bullet \mathbf{w} + \mathbf{v} \bullet \mathbf{w}$
3. $(c\mathbf{u}) \bullet \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}) = \mathbf{u} \bullet (c\mathbf{v})$
4. $\mathbf{u} \bullet \mathbf{u} \geq 0$

# Lengde

- **Lengden** (eller **normen**) til en vektor $\mathbf{v}$ er $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}}$.
- En vektor $\mathbf{u}$ er en **enhetsvektor** hvis $\|\mathbf{u}\| = 1$.
- For en gitt vektor $\mathbf{v}$ kan vi finne enhetsvektoren som peker i samme retning slik: $\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$
- **Avstanden** mellom $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er $\mathrm{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$

## Ortogonalitet

To vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er **ortogonale** hvis $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$.

Det **ortogonale komplementet** til et underrom $W$ av $\mathbb{R}^n$ består av alle vektorer i $\mathbb{R}^n$ som er ortogonale til alle vektorene i $W$, og skrives $W^\perp$.

**Teorem**

*For en matrise A har vi:*

1. $(\mathrm{Row}\, A)^\perp = \mathrm{Null}\, A$
2. $(\mathrm{Col}\, A)^\perp = \mathrm{Null}\, A^\mathsf{T}$

# Ortogonale mengder

- En mengde $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ av vektorer i $\mathbb{R}^n$ er en **ortogonal mengde** hvis alle vektorene i mengden er ortogonale med hverandre (altså: for alle $i$ og $j$ slik at $i \neq j$, er $\mathbf{u}_i$ og $\mathbf{u}_j$ ortogonale).
- Hvis $S \subseteq \mathbb{R}^n$ er en ortogonal mengde som ikke inneholder nullvektoren, så er $S$ en basis for vektorrommet Span $S$ utspent av $S$. En slik basis kalles en **ortogonal basis**.

# Projeksjon på linje

La $\mathbf{u}$ og $\mathbf{y}$ være vektorer, og la $L = \text{Span}\{\mathbf{u}\}$. **Projeksjonen** av $\mathbf{y}$ på $L$ er vektoren $\hat{\mathbf{y}}$ i $L$ som er nærmest $\mathbf{y}$. Kan skrive

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z},$$

der $\mathbf{z}$ er ortogonal med $\mathbf{u}$.

Finner $\hat{\mathbf{y}}$ slik:

$$\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y} \bullet \mathbf{u}}{\mathbf{u} \bullet \mathbf{u}} \mathbf{u}$$

# Koeffisienter for ortogonal basis

**Teorem**

*La* $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ *være en ortogonal basis for et vektorrom* $W$*. Hvis vi vil uttrykke en vektor* $\mathbf{y}$ *i* $W$ *som en lineærkombinasjon*

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_p\mathbf{u}_p$$

*av basisvektorene, kan vi beregne koeffisientene* $c_i$ *slik:*

$$c_i = \frac{\mathbf{y} \bullet \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i \bullet \mathbf{u}_i}$$

## Ortonormale mengder

- En mengde $S \subseteq \mathbb{R}^n$ er **ortonormal** hvis den er ortogonal og består av enhetsvektorer.
- En basis som er ortonormal kalles en **ortonormal basis.**

**Teorem**

*La $U$ være en matrise. Mengden av kolonner i $U$ er ortonormal hvis og bare hvis $U^{\mathsf{T}} U = I$.*

## Dagens pensum

- **Lay 6.1** *Inner Product, Length, and Orthogonality*, s. 348–354
- **Lay 6.2** *Orthogonal Sets*, s. 356–362