NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

# Eksamensoppgave i **TMA4110/TMA4115 Matematikk 3**

**Faglig kontakt under eksamen:** Tjerand Silde

**Tlf:** 47301607

**Eksamensdato:** 09. august 2019

**Eksamenstid (fra–til):** 09:00–13:00

**Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler:** C: Spesifiserte trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

**Annen informasjon:**
Eksamen består av ti deloppgaver. Alle deloppgaver teller likt. Alle svar skal begrunnes. I år spesifiserer vi at INGEN trykte eller håndskrevne hjelpemidler er tilllatt.

**Målform/språk:** bokmål

**Antall sider:** 2

**Antall sider vedlegg:** 0

**Kontrollert av:**

| **Informasjon om trykking av eksamensoppgave** | |
|---|---|
| **Originalen er:** | |
| **1-sidig** ☐ | **2-sidig** ☒ |
| **sort/hvit** ☒ | **farger** ☐ |
| **skal ha flervalgskjema** ☐ | |

Dato Sign

## Oppgave 1

**a)** Finn alle løsninger av

$$z^5 = i$$

i $\mathbb{C}$ og skissér disse i det komplekse planet.

**b)** La $z$ og $w$ være komplekse tall. Vis at

$$\overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}.$$

## Oppgave 2

**a)** La $A$ være en reell $m \times n$-matrise. Skriv ned definisjonen på nullrommet til $A$. Vis at nullrommet er et underrom av $\mathbb{R}^n$.

Vi studerer matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -5 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

**b)** Ligger

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ eller } \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

i nullrommet til $A$?

Finn en basis for Col$A$ og en basis for Null$A$. Bestem dimensjonen på disse underrommene.

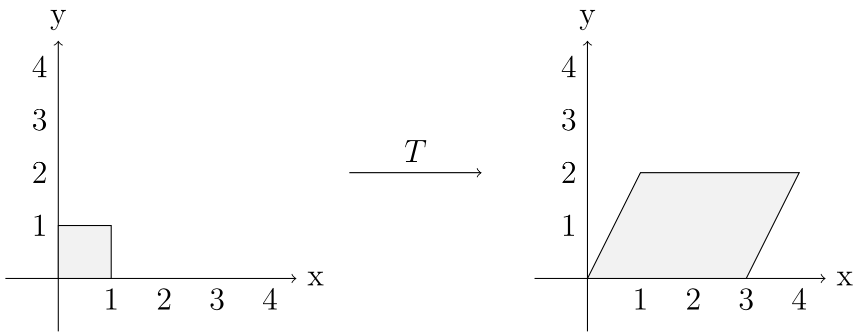
**c)** Finn en ortogonal basis for Col$A$. Regn ut den ortogonale projeksjonen av $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$ ned på Col$A$.

**Oppgave 3** En lineærtransformasjon $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avbilder firkanten med hjørner i

$$(0,0),\ (1,0),\ (0,1) \text{ og } (1,1)$$

til parallellogrammet utspent av

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$




Finn standardmatrisen $[T]$ til $T$ og regn ut $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$. Finn ker $T$. Er $T$ surjektiv?

**Oppgave 4** Finn den generelle løsningen til differensiallikningssystemet

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} \qquad \text{der} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

**Oppgave 5** Finn en eksplisitt formel for $A^n$ når $n \geq 0$ og

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}.$$

**Oppgave 6** Skriv ned definisjonen på en diagonaliserbar kvadratisk matrise. Vis at en diagonaliserbar $2 \times 2$-matrise med en egenverdi med multiplisitet to må være diagonal.

**Oppgave 7** La $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$, der $\mathbf{v} \neq 0$. Definer projeksjonen $P_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})$ av $\mathbf{w}$ på $\mathbf{v}$. Vis at projeksjonen $P_{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er en lineærtransformasjon. Vis at $P_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})$ og $\mathbf{w} - P_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})$ er ortogonale.