NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4110/TMA4115 Matematikk 3**

Faglig kontakt under eksamen: Tjerand Silde

Tlf: mobil Tjerand

Eksamensdato: 09. august 2019

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C: Spesifiserte trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:
Eksamen består av ti deloppgaver. Alle deloppgaver teller likt. Alle svar skal begrunnes. I år spesifiserer vi at INGEN trykte eller håndskrevne hjelpemidler er tilllatt.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 7

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1

a) Vi følger standardprosedyren, og skriver

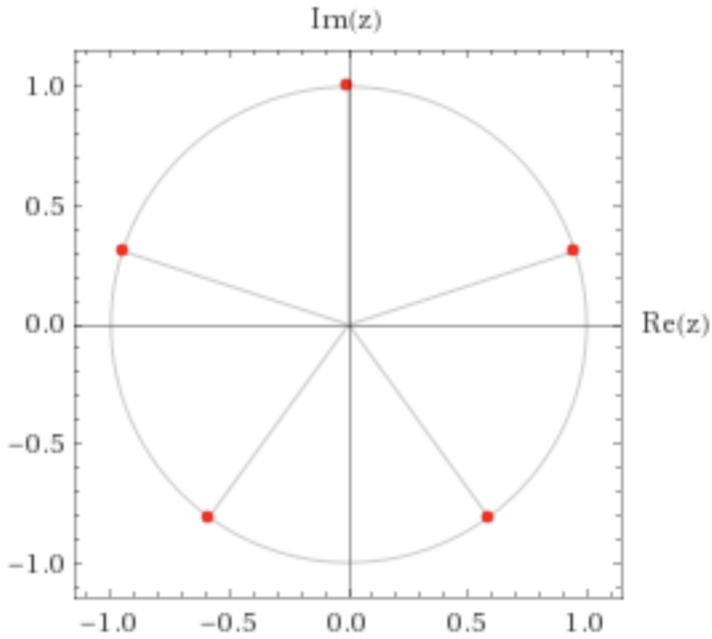
$$z^5 = i = e^{(1/2+2k)\pi i},$$

ettersom $e^{\pi i/2} = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = i$. Da følger det at

$$z = e^{(1/10+2k/5)\pi i},$$

for $0 \le k \le 4$. Løsningene blir dermed

$$z = e^{\pi i/10} \wedge e^{\pi i/2} \wedge e^{9\pi i/10} \wedge e^{13\pi i/10} \wedge e^{17\pi i/10}.$$



Figur 1: Skisse av løsningene i oppgave **1a)**.

b) La $z = r_1 e^{\theta_1 i}$ og $w = r_2 e^{\theta_2 i}$, slik at $\overline{z} = r_1 e^{-\theta_1 i}$ og $\overline{w} = r_2 e^{-\theta_2 i}$. Siden

$$z/w = \frac{r_1}{r_2} e^{(\theta_1 - \theta_2)i},$$

må

$$\overline{z/w} = \frac{r_1}{r_2} e^{(-\theta_1+\theta_2)i} = \overline{z}/\overline{w}.$$

Alternativt kan vi la $z = a+bi$ og $w = c+di$, slik at $\overline{z} = a-bi$ og $\overline{w} = c-di$, hvor a, b, c, d er reelle tall. Da er

$$z/w = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)}{(c+di)}\frac{(c-di)}{(c-di)} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} = \frac{ac-adi+bci+db}{c^2+d^2}$$

og

$$\overline{z}/\overline{w} = \frac{a-bi}{c-di} = \frac{a-bi}{c-di}\frac{c+di}{c+di} = \frac{(a-bi)(c+di)}{c^2+d^2} = \frac{ac+adi-bci+db}{c^2+d^2}.$$

Da ser vi direkte at

$$\overline{z/w} = \frac{ac+adi-bci+db}{c^2+d^2} = \overline{z}/\overline{w}.$$

Oppgave 2

a) Nullrommet til A er alle vektorer $\mathbf{x}$ slik at

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

For at nullrommet skal være et underrom av $\mathbb{R}^n$ så må vi vise tre ting:
1) $\mathbf{0} \in \text{Null } A$,
2) dersom $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \text{Null } A$ så må $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \text{Null } A$, og
3) dersom $\mathbf{u} \in \text{Null } A$ så må $r\mathbf{u} \in \text{Null } A$ for alle $r \in \mathbb{R}$.

Det er lett å se at punkt 1) er oppfylt: $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Dermed er $\mathbf{0} \in \text{Null } A$.

Punkt 2) følger fra det faktum at matrisemultiplikasjon er distributiv. Da får vi at $A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = \mathbf{0}+\mathbf{0} = \mathbf{0}$, som gir at $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \text{Null } A$.

Punkt 3) følger fra det faktum at konstanter kan flyttes utenfor. Da får vi at $A(r\mathbf{u}) = r(A\mathbf{u}) = r\mathbf{0} = \mathbf{0}$, som gir at $r\mathbf{u} \in \text{Null } A$ for alle $r \in \mathbb{R}$.

b) Vi beregner

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -5 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -19 \\ 1 \end{bmatrix}$$

og

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -5 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Den første vektoren ligger ikke i nullrommet til A. Den andre gjør det.

Siden nullrommet til A inneholder minst én vektor, må kolonnerommet til A ha være en- eller todimensjonalt, og siden kolonnene i A ikke er parallelle, må kolonnerommet være todimensjonalt. Siden

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ligger i nullrommet til A, og det er endimensjonalt, så er den en basisvektor for nullrommet. Videre kan vi finne en basis for kolonnerommet ved å Gauss-eliminere matrisen på følgende vis:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -5 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -5 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da ser vi at de to første kolonnene har ledende enere, og vi kan dermed velge en basis for kolonnerommet til A som består av de to første kolonnene i matrisen A. Vi kan også forenkle den andre kolonnen ved å dele på to. Dette impliserer at:

$$\text{Col } A = span \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}, \text{ og Null } A = span \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

c) Vi tar utgangspunkt i basisen vi fant i forrige oppgave, og bruker Gram-Schmidt for å finne en ortogonal basis for kolonnerommet til A: Først setter vi $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \end{bmatrix}^\top$, og så ortogonaliserer vi slik at

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{13}{30} \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 34 \\ 5 \\ -43 \end{bmatrix}$$

og, etter å ha skalert opp $\mathbf{v}_2$, velger

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 34 \\ 5 \\ -43 \end{bmatrix} \right\}$$

som vår ortogonale basis.

Siden vi har en ortogonal basis for kolonnerommet til A, kan vi projisere vektoren

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

på hvert av disse basiselementene, og så legge projeksjonene sammen for å få den ortogonale projeksjonen på kolonnerommet. Vektoren vi skal ha, er altså

$$\begin{aligned}
P_{\mathrm{Col}\ A}(\mathbf{b}) &= P_{\mathbf{v}_1}(\mathbf{b}) + P_{\mathbf{v}_2}(\mathbf{b}) \\
&= \frac{\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 34 \\ 5 \\ -43 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 34 \\ 5 \\ -43 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 34 \\ 5 \\ -43 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 34 \\ 5 \\ -43 \end{bmatrix} \\
&= \frac{0}{30} \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{-270}{3030} \begin{bmatrix} 34 \\ 5 \\ -43 \end{bmatrix} \\
&= \frac{-9}{101} \begin{bmatrix} 34 \\ 5 \\ -43 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Vi kunne også brukt minste kvadraters metode for å få samme løsning, eller brukt en annen basis fra forrige oppgave.

Oppgave 3 Vi kan velge T slik at $T(1,0) = (3,0)$ og $T(0,1) = (1,2)$, og da blir standardmatrisen

$$[T] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Vi beregner

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = [T]\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix},$$

som forventet. Husk at en inverterbar kvadratisk matrise er både injektiv og surjektiv. Siden $\det([T]) = 6 \neq 0$, er dette en inverterbar lineærtransformasjon, som betyr at den er injektiv, og følgelig er $\ker T = \{\mathbf{0}\}$. Av samme grunn har likningssystemet

$$T\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

løsning for alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$, og T er dermed surjektiv.

OBS: vi kunne også valgt T slik at $T(1,0) = (1,2)$ og $T(0,1) = (3,0)$, men fått samme resultat pga symmetri.

Oppgave 4 Vi betrakter likningssystemet:

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} \qquad \text{der} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Vi vet at den generelle løsningen er på formen:

$$\mathbf{y}(t) = c_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t},$$

hvor c_1, c_2 er vilkårlige konstanter, λ_1, λ_2 er egenverdiene til matrisen A og $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ er de tilhørende egenvektorene. Først finner vi egenverdiene til A:

$$\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0.$$

Da følger det at egenverdiene er $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = -1$. Vi setter de inn for å finne egenvektorene:

$$(A - I_2)\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \text{ og } (A + I_2)\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

Dette gir $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Da får vi den generelle løsningen:

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}.$$

Oppgave 5 Betrakt

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}.$$

Vi finner først egenverdiene. Det følger fra $\det(A - \lambda I_2) = 0$ at det karakteristiske polynomet er $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$. Da har vi egenverdiene $\lambda_1 = 2$ og $\lambda_2 = -1$. Vi setter inn verdiene for λ og får:

$$A - 2I_2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -6 & -6 \end{bmatrix} \text{ og } A + I_2 = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}.$$

Dette gir oss egenvektorene $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^\top$ og $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}^\top$. Så setter vi verdiene vi har fått inn i D og P:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ og } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Videre beregner vi P^{-1}, og får:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Til slutt beregner vi $A^n = PD^nP^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{n+1} + 2^{n+1} & (-1)^{n+1} + 2^n \\ 2(-1)^n - 2^{n+1} & 2(-1)^n - 2^n \end{bmatrix}.$$

Vi kan sjekke at dette stemmer for $n = 2$:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 2^3 & -1 + 4 \\ 2 - 2^3 & 2 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{2+1} + 2^{2+1} & (-1)^{2+1} + 2^2 \\ 2(-1)^2 - 2^{2+1} & 2(-1)^2 - 2^2 \end{bmatrix} = A^2.$$

Oppgave 6 Vi sier at en $n \times n$-matrise A er diagonaliserbar hvis det finnes en diagonalmatrise D og en inverterbar matrise P slik at $A = PDP^{-1}$.

Så skal vi vise at en diagonaliserbar 2×2-matrise A med en egenverdi av multipliset to må være diagonal. La λ være egenverdien til A. Vi vet da at A er diagonaliserbar, og at den tilhørende diagonalmatrisen D er

$$D = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \lambda I$$

Altså finnes det en inverterbar matrise P, slik at $\lambda I = P^{-1}AP$. Multipliser denne ligningen med P på venstre side, og P^{-1} på høyre side, og bruk at $P(\lambda I) = \lambda P$, som gir

$$A = P(\lambda I)P^{-1} = (\lambda P)P^{-1} = \lambda(PP^{-1}) = \lambda I = D.$$

Vi konkluderer at A er en diagonalmatrise.

Oppgave 7 Projeksjonen $P_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})$ av $\mathbf{w}$ på $\mathbf{v}$ er definert som

$$P_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\mathbf{v}. \tag{1}$$

At $P_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})$ er en lineærtransform følger essensielt av det faktum at skalarproduktet er lineært i andre faktor. For å se at skalarproduktet er lineært i andre faktor, må vi vise at

$$\mathbf{v} \cdot (a\mathbf{w} + b\mathbf{u}) = a\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + b\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}. \tag{2}$$

Husk at $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ er matriseproduktet $\mathbf{v}^\top \mathbf{w}$. Det er med andre ord lineærtransformasjonen som er gitt av $1 \times n$-matrisen $\mathbf{v}^\top$. Dette gir automatisk at skalarproduktet er lineært, fordi matriseproduktet er distributivt.

Nå er det rett frem å vise at projeksjonen på $\mathbf{v}$ er en lineærtransformasjon:

$$\begin{aligned}
P_{\mathbf{v}}(a\mathbf{w} + b\mathbf{u}) &= \frac{\mathbf{v} \cdot (a\mathbf{w} + b\mathbf{u})}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\mathbf{v} \\
&= \frac{a\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + b\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\mathbf{v} \\
&= a\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\mathbf{v} + b\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\mathbf{v} \\
&= aP_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) + bP_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}).
\end{aligned}$$

Til slutt viser vi at $P_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})$ og $\mathbf{w} - P_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})$ er ortogonale:

$$\begin{aligned}
P_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) \cdot (\mathbf{w} - P_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})) =& \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\mathbf{v}) \\
=& \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\mathbf{v} \\
=& \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} - (\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}})(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}})\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \\
=& \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \\
&= 0.
\end{aligned}$$