NTNU

Kunnskap for ei betre verd

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgåve i **TMA4110/TMA4115 Matematikk 3**

Fagleg kontakt under eksamen: Tjerand Silde

Tlf: 47301607

Eksamensdato: 09. august 2019

Eksamenstid (frå–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatne hjelpemiddel: C: Spesifiserte trykte og handskrivne hjelpemiddel tillatne. Bestemt, enkel kalkulator tillate.

Annan informasjon:
Eksamen består av ti deloppgåver. Alle deloppgåvene tel likt. Alle svara skal grunngjevast. I år spesifiserar me at INGEN trykte eller handskrivne hjelpemiddel er tillate.

Målform/språk: nynorsk

Sidetal: 2

Sidetal vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgåve	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
svart/kvit ☒	**fargar** ☐
skal ha fleirvalskjema ☐	

Dato Sign

Oppgåve 1

a) Finn alle løysningar av

$$z^5 = i$$

i $\mathbb{C}$ og skissér disse i det komplekse planet.

b) La z og w være komplekse tall. Vis at

$$\overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}.$$

Oppgåve 2

a) La A være ei reell $m \times n$-matrise. Skriv ned definisjonen på nullrommet til A. Vis at nullrommet er eit underrom av $\mathbb{R}^n$.

Vi studerar matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -5 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

b) Ligg

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ eller } \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

i nullrommet til A?

Finn ein basis for Col$A$ og ein basis for Null$A$. Bestem dimensjonen på underromma.

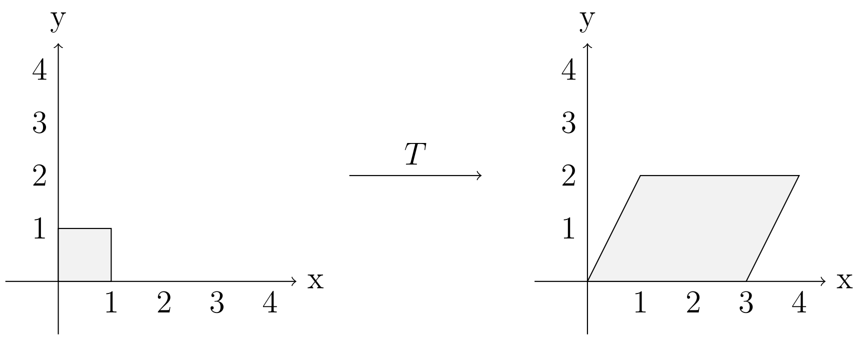
c) Finn ein ortogonal basis for Col$A$. Rekn ut den ortogonale projeksjonen av $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$ ned på Col$A$.

Oppgåve 3 Ein lineærtransformasjon $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avbilder firkanten med hjørner i

$$(0,0),\ (1,0),\ (0,1) \text{ og } (1,1)$$

til parallellogrammet utspent av

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$



Finn standardmatrisa $[T]$ til T og rekn ut $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$. Finn ker T. Er T surjektiv?

Oppgåve 4 Finn den generelle løysninga til differensiallikningssystemet

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} \qquad \text{der} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Oppgåve 5 Finn ein eksplisitt formel for A^n når $n \geq 0$ og

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}.$$

Oppgåve 6 Skriv ned definisjonen på ei diagonaliserbar kvadratisk matrise. Vis at ei diagonaliserbar 2×2-matrise med ein eigenverdi med multiplisitet to må være diagonal.

Oppgåve 7 La $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ være vektorar i $\mathbb{R}^n$, der $\mathbf{v} \neq 0$. Definer projeksjonen $P_\mathbf{v}(\mathbf{w})$ av $\mathbf{w}$ på $\mathbf{v}$. Vis at projeksjonen $P_\mathbf{v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er ein lineærtransformasjon. Vis at $P_\mathbf{v}(\mathbf{w})$ og $\mathbf{w} - P_\mathbf{v}(\mathbf{w})$ er ortogonale.