NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4115 Matematikk 3**

Faglig kontakt under eksamen: Aslak Bakke Buan[a], Morten Andreas Nome[b], Tjerand Silde[c]

Tlf: [a]40840468 , [b]90849783 , [c]47301607

Eksamensdato: 31. mai 2019

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C: Spesifiserte trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:
Eksamen består av ti deloppgaver. Alle deloppgaver teller likt. Alle svar skal begrunnes. I år spesifiserer vi at INGEN trykte eller håndskrevne hjelpemidler er tilllatt.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1

a) Finn basiser for kolonne- og nullrommet til matrisen $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 2 & -10 \end{bmatrix}$.

b) Finn alle komplekse løsninger av systemet

$$\begin{aligned} x - y + iz &= 0 \\ -x + iy - z &= 0. \end{aligned}$$

Oppgave 2

a) Finn et polynom $f(x) = ax^2 + bx + c$ som går gjennom punktene $(-1, 5)$, $(0, 1)$, $(1, -1)$ og $(2, -1)$ i $\mathbb{R}^2$.

Bruk minste kvadraters metode til å finne den rette linjen $g(x) = dx + e$ som passer best til de fire punktene.

Skissér grafene til f og g.

b) La

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Bestem den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{b}$ ned på Col$A$.

Er $P_{\mathrm{Col}A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, lineærtransformasjonen som projiserer ned på Col$A$, injektiv?

Oppgave 3 Skriv ned definisjonen av lineær uavhengighet, og bruk den til å vise at vektorene $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ er lineært uavhengige.

Oppgave 4 Finn et system av lineære differensialligninger

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$$

som har generell løsning

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t} + c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} e^{3t}$$

og skissér fasediagrammet til dette systemet.

Oppgave 5 Et emne i lineæralgebra foreleses i to paralleller, en i S7 og en i S8. Begge foreleserne er veldig dårlige, og derfor bytter studenter parallell ofte. Sannsynligheten for at en student bytter parallell etter en gitt forelesningsuke er 40%.

Bestem en stokastisk matrise M som beskriver denne prosessen. Parallellene er ved semesterstart satt opp med henholdsvis 180 og 140 studenter. Hvordan vil studentene fordele seg etter 14 forelesningsuker, dersom mot formodning ingen studenter slutter å gå i forelesning?

Oppgave 6 La $p(x) = 3x^2 - 3x - 6$, $q(x) = x^2 - x - 8$ og $r(x) = 4x^2 - 9x + 3$. Avgjør om $r(x)$ kan skrives som en lineærkombinasjon av $p(x)$ og $q(x)$.

Avgjør om p og q er ortogonale med hensyn på indreproduktet

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx.$$

Oppgave 7 En projeksjonsmatrise M er en matrise slik at $M^2 = M$.

a) La $T \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ være funksjonen gitt ved

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (x_1, x_2, 0, \ldots, 0),$$

der $m \geq 2$. Vis at T er en lineærtransformasjon og finn standardmatrisen $[T]$. Vis at $[T]$ er en projeksjonsmatrise, og finn egenverdiene til $[T]$ for alle $m \geq 2$.

b) La M være en projeksjonsmatrise som ikke er nullmatrisen eller identitetsmatrisen. Vis at M ikke er inverterbar. Vis at M har egenverdier 0 og 1, og ingen andre egenverdier.