NTNU

Kunnskap for ei betre verd

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgåve i **TMA4115 Matematikk 3**

Fagleg kontakt under eksamen: Aslak Bakke Buan[a], Morten Andreas Nome[b], Tjerand Silde[c]

Tlf: [a]40840468 , [b]90849783 , [c]47301607

Eksamensdato: 31. mai 2019

Eksamenstid (frå–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatne hjelpemiddel: C: Spesifiserte trykte og handskrivne hjelpemiddel tillatne. Bestemt, enkel kalkulator tillate.

Annan informasjon:
Eksamen består av ti deloppgåver. Alle deloppgåvene tel likt. Alle svara skal grunngjevast. I år spesifiserar me at INGEN trykte eller handskrivne hjelpemiddel er tillate.

Målform/språk: nynorsk

Sidetal: 2

Sidetal vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgåve	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
svart/kvit ☒	**fargar** ☐
skal ha fleirvalskjema ☐	

Dato Sign

Oppgåve 1

a) Finn basisar for kolonne- og nullrommet til matrisa $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 2 & -10 \end{bmatrix}$.

b) Finn alle komplekse løysningar av systemet

$$\begin{aligned} x - y + iz &= 0 \\ -x + iy - z &= 0. \end{aligned}$$

Oppgåve 2

a) Finn eit polynom $f(x) = ax^2 + bx + c$ som går gjennom punkta $(-1, 5), (0, 1), (1, -1)$ og $(2, -1)$ i $\mathbb{R}^2$.

Bruk minste kvadrats metode til å finne den rette linja $g(x) = dx + e$ som passar best til dei fire punkta.

Skissér grafane til f og g.

b) La

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Bestem den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{b}$ ned på $\mathrm{Col}A$.

Er $P_{\mathrm{Col}A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, lineærtransformasjonen som projiserar ned på $\mathrm{Col}A$, injektiv?

Oppgåve 3 Skriv ned definisjonen av lineær uavhengigheit, og bruk den til å visa at vektorane $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ er lineært uavhengige.

Oppgåve 4 Finn eit system av lineære differensiallikningar

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$$

som har den generelle løysinga

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t} + c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} e^{3t}$$

og skissér fasediagrammet til dette systemet.

Oppgåve 5 Eit emne i lineær algebra blir forelest i to parallellar, ein i S7 og ein i S8. Begge forelesarane er veldig dårlege, og difor bytar studentar parallell ofte. Sannsynet for at ein student bytar parallell etter ei gitt forelesningsveke er 40%.

Bestem ei stokastisk matrise M som beskriv denne prosessen. Ved semesterstart er parallellane sett opp med høvesvis 180 og 140 studentar. Korleis vil studentane vere fordelt etter 14 forelesningsveker, gitt at ingen studentar sluttar å gå i forelesningane?

Oppgåve 6 La $p(x) = 3x^2 - 3x - 6$, $q(x) = x^2 - x - 8$ og $r(x) = 4x^2 - 9x + 3$. Avgjer om $r(x)$ kan skrivast som ein lineærkombinasjon av $p(x)$ og $q(x)$.

Avgjer om p og q er ortogonale med omsyn på indreproduktet

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx.$$

Oppgåve 7 Ei projeksjonsmatrise M er ei matrise slik at $M^2 = M$.

a) La $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ være funksjonen gitt ved

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (x_1, x_2, 0, \ldots, 0),$$

der $m \geq 2$. Vis at T er ein lineærtransformasjon og finn standardmatrisa $[T]$. Vis at $[T]$ er ei projeksjonsmatrise, og finn eigenverdiane til $[T]$ for alle $m \geq 2$.

b) La M være ei projeksjonsmatrise som ikkje er nullmatrisa eller identitetsmatrisa. Vis at M ikkje er inverterbar. Vis at M har eigenverdiar 0 og 1, og ingen andre eigenverdiar.