NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4115 Matematikk 3**

Faglig kontakt under eksamen: Aslak Bakke Buan[a], Morten Andreas Nome[b], Tjerand Silde[c]

Tlf: [a] mobil Aslak , [b] mobil Morten , [c] mobil Tjerand

Eksamensdato: 31. mai 2019

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C: Spesifiserte trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:
Eksamen består av ti deloppgaver. Alle deloppgaver teller likt. Alle svar skal begrunnes. I år spesifiserer vi at INGEN trykte eller håndskrevne hjelpemidler er tilllatt.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 8

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1

a) Vi radreduserer matrisen:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 2 & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Fra den radreduserte matrisen ser vi at alle kolonnene er parallelle. Dette vil si at alle de orginiale kolonnene utgjør en basis for kolonnerommet, hver for seg. Kolonnerommet har dimensjon 1, og for eksempel er $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$ en basis for kolonnerommet. Nullrommet er alle vektorer som tilfredsstiller

$$x_1 - x_2 + 5x_3 = 0.$$

Vi velger $x_2 = s$ og $x_3 = t$. Da får vi at $x_1 = s - 5t$, og skriver

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s - 5t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nullrommet har dimensjon 2. En basis for nullrommet er $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

b) Vi representerer ligningene

$$\begin{aligned} x - y + iz &= 0, \\ -x + iy - z &= 0. \end{aligned}$$

som en matrise og radreduserer:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & i & 0 \\ -1 & i & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & i & 0 \\ 0 & -1+i & -1+i & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Siden det er to pivotelementer, får vi en fri variabel. Vi kan velge $z = s$, slik at $y = -s$, og $x = -(1+i)s$, og løsningene er på formen:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -(1+i) \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \forall s \in \mathbb{C}.$$

Oppgave 2

a) Vi evaluerer polynomet $f(x) = ax^2 + bx + c$ i $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ og $x = 2$, og får likningssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Vi ser umiddelbart av den andre likningen at $c = 1$. For å finne a og b kan vi bruke verdien til c, og sette opp det følgende likningssystemet basert på de to første radene:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Legger vi sammen likningene ser vi at $a = 1$ og $b = -3$. Dersom polynomet som etterspørres eksisterer, må det altså være $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Vi har brukt de tre første likningene til å finne f, og vi må sjekke at også den fjerde likningen er oppfylt. Siden $f(2) = -1$, er den det, og vi har funnet andregradspolynomet som etterspørres.

For å finne den rette linjen som approksimerer de samme punktene så ganger vi med A^T på begge sider av likningssystemet, og får

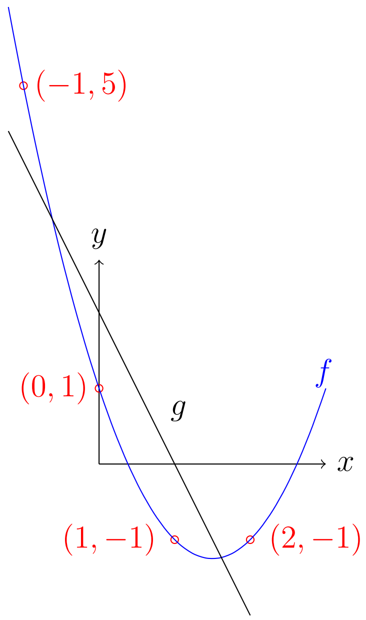
$$\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Dette ligningssystemet har løsning $d = -2$ og $e = 2$.

b) Denne oppgaven kan løses på (minst) to forskjellige måter. I forrige oppgave projiserte vi $\mathbf{b}$ ned i kolonnerommet til A ved å bruke minste kvadraters metode. Altså fikk vi at

$$P_{\text{Col } A}(\mathbf{b}) = d \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + e \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

En annen måte er å først finne en ortogonal basis for kolonnerommet til A, og så projisere $\mathbf{b}$ ned på denne basisen. La $\mathbf{u}_1$ være første kolonne i A og la $\mathbf{u}_2$ være andre kolonne i A. Da er indreproduktet (prikkproduktet, siden det er to reelle vektorer) $< \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 >= 2$. De er altså ikke ortogonale, og vi må



Figur 1: Skisse av grafene f og g i oppgave 2a.

bruke Gram–Schmidt for å få en ortogonal basis. La $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$. Vi observerer at $< \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 >= 6$. Så, la

$$\bar{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{< \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 >}{< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 >}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{6}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Da utgjør $\{\mathbf{v}_1, \bar{\mathbf{v}}_2\}$ en basis for kolonnerommet til A. For å gjøre det litt enklere å regne videre så lar vi $\mathbf{v}_2 = 3 \cdot \bar{\mathbf{v}}_2$. Da er $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ også en basis for kolonnerommet til A. Videre,

$$\begin{aligned} P_{\text{Col } A}(\mathbf{b}) &= P_{\mathbf{v}_1}(\mathbf{b}) + P_{\mathbf{v}_2}(\mathbf{b}) \\ &= \frac{< \mathbf{b}, \mathbf{v}_1 >}{< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 >}\mathbf{v}_1 + \frac{< \mathbf{b}, \mathbf{v}_2 >}{< \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 >}\mathbf{v}_2 \\ &= \frac{-8}{6}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{20}{30}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Projeksjonen $P_{\text{Col}A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ er ikke injektiv. Vektoren $\mathbf{b} + \mathbf{v}$, der $\mathbf{v}$ er et vilkårlig element i nullrommet til A^T, vil gi oss akkurat den samme prosjeksjonen som $\mathbf{b}$ i kolonnerommet til A. Dette er mengden av alle vektorer som står ortogonalt på kolonnerommet til A. Kjernen til P består altså av mer enn bare nullvektoren, og resultatet følger.

Oppgave 3 Vektormengden $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ ... $\mathbf{v}_n$ sies å være lineært uavhengig dersom likningen

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = 0$$

impliserer

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0.$$

Vi må altså sette opp et likningssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 3 & 6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

og sjekke om $c_1 = c_2 = 0$ er eneste løsning. Den siste likningen sier at $4c_1 = 0$, og likningen over sier at $6c_2 = 0$. Altså er $c_1 = c_2 = 0$ eneste løsning, og vektorene er lineært uavhengige.

Oppgave 4 Siden den generelle løsningen er

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} e^{3t}.$$

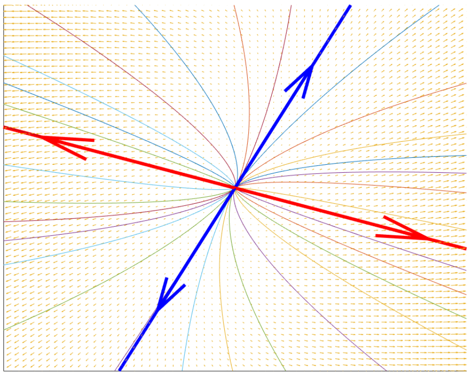
må matrisen til likningssystemet ha egenvektorer

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

med korresponderende egenverdier 2 og 3, henholdsvis. Vi kan sette sammen A ved å bruke at $A = PDP^{-1}$.

Vi har $P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ og får

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{7} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 20 & -3 \\ -2 & 15 \end{pmatrix}.$$



Figur 2: Fasediagram for løsningsrommet i oppgave 4. Blå linje representerer første egenvektor, rød linje representerer andre egenvektor. Løsningene beveger seg bort fra origo på grunn av positive egenverdier. Røde linjer dominerer for store t ettersom andre egenverdi er større enn første egenverdi.

Oppgave 5 Sannsynligheten for at en student bytter parallell er 0.4, og sannsynligheten for at vedkommende blir, er 0.6. Den stokastiske matrisen blir

$$\begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Det er totalt 320 studenter som tar emnet, og for å finne fordelingen etter fjorten uker, må vi beregne vektoren

$$A^{14} \cdot \frac{1}{320} \begin{pmatrix} 180 \\ 140 \end{pmatrix}.$$

Dette gjøres enklest ved å diagonalisere A. Siden A er en stokastisk matrise, vet vi at den ene egenverdien er 1. En normalisert egenvektor er

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Siden A er reell og symmetrisk, står egenvektoren til den andre egenverdien ortogonalt på vektoren over. En normalisert egenvektor er

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

og du kan sjekke at den korresponderende egenverdien er $1/5$ ved å gange denne vektoren inn i A. Vi har nå diagonalisert A, og kan beregne A^{14}:

$$A^{14} = PD^{14}P^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5^{14}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Vi kan nå beregne

$$A^{14} \cdot \frac{1}{320}\begin{pmatrix}180\\140\end{pmatrix} \approx \frac{1}{320}\begin{pmatrix}160\\160\end{pmatrix}.$$

Studentene fordeler seg altså jevnt mellom parallellene ved undervisningsslutt.

Oppgave 6 Vi prøver å skrive $r = c_1p + c_2q$. Dette svarer til følgende operasjon:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 4 \\ -3 & -1 & -9 \\ -6 & -8 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & -6 & 11 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 4 \\ 0 & -6 & 11 \\ 0 & 0 & -5 \end{array}\right]$$

Den nederste raden forteller at $0 = -5$. Dette er en inkonsistent likning, altså kan $r(x)$ ikke skrives som en lineærkombinasjon av $p(x)$ og $q(x)$.

Vi integrerer

$$\begin{aligned}\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx &= \int_0^1 (3x^2 - 3x - 6)(x^2 - x - 8)\,dx = \\ &= \int_0^1 3x^4 - 6x^3 - 27x^2 + 30x + 48\,dx = \\ &= \left[\frac{3}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 - 9x^3 + 15x^2 + 48x\right]_0^1 = \frac{531}{10}.\end{aligned}$$

Funksjonene er altså ikke ortogonale, siden indreproduktet er ulikt 0.

Oppgave 7 En projeksjonsmatrise M er en matrise slik at $M^2 = M$.

a) For en lineærtransformasjon $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ gjelder:

1. $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ for alle $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^m$.
2. $T(c\mathbf{u}) = c \cdot T(\mathbf{u})$ for alle vektorer $\mathbf{u}$ i $\mathbb{R}^m$ og alle skalarer $c \in \mathbb{R}$.

Vi sjekker den første egenskapen:

$$\begin{aligned} T(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_m + y_m) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, 0, \ldots, 0) \\ &= (x_1, x_2, 0, \ldots, 0) + (y_1, y_2, 0, \ldots, 0) \\ &= T(x_1, x_2, \ldots, x_m) + T(y_1, y_2, \ldots, y_m). \end{aligned}$$

og den andre:

$$\begin{aligned}T(cx_1, cx_2, \ldots, cx_m) &= (cx_1, cx_2, 0, \ldots, 0)\\ &= c(x_1, x_2, 0, \ldots, 0)\\ &= cT(x_1, x_2, \ldots, x_m).\end{aligned}$$

For å finne standardmatrisen, kan vi anvende T på standardbasisen for $\mathbb{R}^m$. Dette gir:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

Spesielt er $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ for $m = 2$.

$[T]^2 = [T]$ sjekkes direkte ved utregning.

For å finne egenverdiene bruker vi definisjonen $[T]\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.

La $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$. Da er $[T]\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\lambda\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \lambda v_3 \\ \vdots \\ \lambda v_m \end{bmatrix}$.

Dette kan bare være oppfyllt for $\lambda = 1$ (og da med $v_3 = \ldots v_m = 0$), eller for $\lambda = 0$ (og da med $v_1 = v_2 = 0$). For $m = 2$ er $[T]$ identitesmatrisa, og 1 er den eneste egenverdien. For $m > 2$ vil både 1 og 0 være egenverdier, med egenvektorer henholdsvis f.eks. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Delspørsmålet kan alternativt løses ved å regne ut karakteristisk polynom og finne at røttene er 0 og 1.

b) Vi har antatt $M \neq I$. Dersom M er inverterbar, kan vi gange likningen $M^2 = M$ med M^{-1} på begge sider, får vi $M = I$, en motsigelse. Altså kan M ikke være inverterbar.

La $\mathbf{x}$ være en egenvektor til M, med egenverdi λ. Vi har

$$\lambda\mathbf{x} = M\mathbf{x} = M^2\mathbf{x} = M\lambda\mathbf{x} = \lambda M\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x}.$$

Denne likningen kan bare være oppfylt (for $\mathbf{x} \neq 0$) dersom $\lambda = 0$ eller $\lambda = 1$, altså er dette de eneste egenverdiene M kan ha.

Vi må vise at M har både 0 og 1 som egenverdier.

Hvis $M\mathbf{v} \neq 0$ for alle vektorer $\mathbf{v} \neq 0$ er M inverterbar. Dette er en motsigelse, så det må finnes $\mathbf{v} \neq 0$ slik at $M\mathbf{v} = 0$. Altså er 0 en egenverdi.

Siden M ikke er nullmatrisen, må minst en kolonne være forskjellig fra 0, og da må det finnes en vektorer $\mathbf{v}$ og $\mathbf{y}$ slik at

$$M\mathbf{v} = \mathbf{y} \neq \mathbf{0}.$$

Men i så fall må

$$M\mathbf{y} = M^2\mathbf{v} = M\mathbf{v} = \mathbf{y},$$

og her står det at $\mathbf{y}$ er en egenvektor med egenverdi 1. Altså må 1 også være en egenverdi.