Introduksjon

Velkommen til emnet TMA4115 Matematikk 3, våren 2019. Disse notatene inneholder det vi gjennomgår i forelesningene, og utgjør, sammen med alle øvingene, pensum for emnet. Læreboken anbefales som støttelitteratur.

Først, et kort overblikk over temaene vi skal innom. Emnet er delt inn i tre deler:

1. Lineær algebra
2. Komplekse tall
3. Lineære differensialligninger

Del 1 er hoveddelen og vil utgjøre ca 70 prosent av emnet. Det er noen viktige tilknytningspunkter mellom disse temaene.

Lineær algebra

Lineære funksjoner i én variabel

To av de mest sentrale begrepene i matematikk er *funksjoner* og *ligninger*. En funksjon er en regel som gir sammenhengen mellom innverdi x og utverdi y, altså $y = f(x)$. Tallet x kalles ofte en variabel, og i skolematematikken er x og y tall. De aller enkleste funksjonene vi kan tenke på, er å gange (eller dele) med et tall, og legge til (eller trekke fra) et tall. Altså funksjoner på formen $f(x) = ax$ eller $g(x) = x + b$.

En funksjon på formen $f(x) = ax+b$, kan vi tenke på som en sammensetning av to funksjoner, vi ganger først med a, så legger vi til b.

Grafen til denne funksjonen er en rett linje. I skolematematikken kaller man disse funksjonene derfor lineære funksjoner. Og å finne nullpunkter kalles å løse lineære ligninger.

Her kaller vi funksjoner på formen $f(x) = ax$ lineære, mens $f(x) = ax + b$ kalles en affin funksjon (eller transformasjon).

Lineære og affine funksjoner er veldig spesielle, men likevel veldig viktige. Det er to grunner til dette:

1. Når vi bruker matematikk til å beskrive verden, må vi veldig ofte forenkle. Moralen er ofte: de fleste funksjoner/ligninger er for vanskelig å bekskrive/løse presist, la oss forenkle funksjonen/ligningene til noe vi kan håndtere, og håpe at beskrivelsen/løsningen fortsatt er nyttig.

2. Mange sammenhenger i den virkelige verden er faktisk lineære (Oppgave: finn dine ti favoritt-lineære funksjoner).

Vi skal se på funksjoner og ligninger med flere variable $x_1, x_2, \dots, x_n$. En lineær funksjon i n variable er en funksjon

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n,$$

der a_i-ene er bestemte tall.

Lineære ligninger i én og flere variable

En lineær ligning i én variabel x, er en ligning på formen

$$ax = b$$

der a, b er tall.

Hvis $a \neq 0$, kan vi løse ligningen med å dele på a, vi får altså $x = b/a$.

En lineær ligning med n variable $x_1, x_2, \dots, x_n$ er en ligning på formen

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

a_i-ene og b er bestemte tall.

Når $n \leq 3$, bruker vi gjerne x, y, z heller enn x_i som notasjon for variablene.

Spesielt er en lineær ligning med to ukjente

$$ax + by = c$$

ligningen for en rett linje. Altså, alle løsningene (x_0, y_0) av ligningen, ligger på en rett linje i xy-planet. Ligningen har altså generelt uendelig mange løsninger. Mer presist: hvis en lineær ligning med to ukjente er løsbar, er mengden av løsninger i xy-planet, en linje, altså et én-dimensjonalt rom.

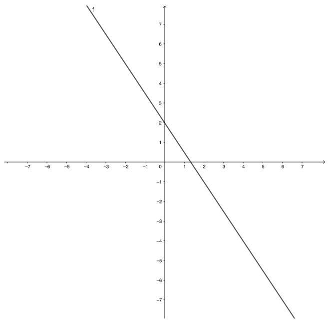
> Oppgave: En lineær ligning med tre ukjente:
>
> $$ax + by + cz = d$$
>
> Hva kan vi si om løsningene til en slik ligning i xyz-rommet? Finnes det alltid løsninger? Hva er den geometriske tolkningen av løsningsmengden?

Vi sier at xy-planet er et *to-dimensjonalt rom*, vi trenger to koordinater for å beskrive et punkt der. En rett linje er et *én-dimensjonalt rom*. Og vi er også vant til å snakke om xyz-rommet som *tre-dimensjonalt*, vi trenger tre koordinater for å beskrive et punkt i rommet. Vi kan også tenke på et punkt som et 0-dimensjonalt rom.

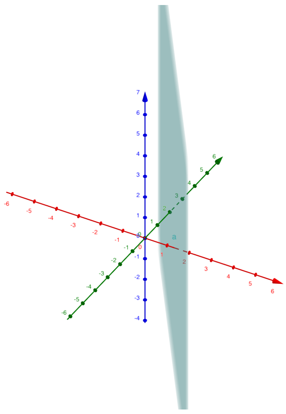
Merk at en ligning

$$ax + by = c$$

også kan betraktes som en ligning i et rom av dimensjon større enn 2, f.eks. en ligning i xyz-rommet. Løsningsmengden vil avhenge av hvilket rom vi betrakter ligingen i.



Grafen for ligningen $3x + 2y = 4$ i xy-planet



Grafen for ligningen $3x+2y = 4$ i xyz-rommet. Dette blir et plan normalt på xy-planet og som går gjennom linja definert av $3x + 2y = 4$ i xy-planet.

Systemer av lineære ligninger i flere variable

I dette emnet skal vi se på systemer med m ligninger med n ukjente. Først et eksempel med to ligninger og to ukjente:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 19 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

Hver ligning definerer en linje i planet. Linjene er ikke parallelle, de skjærer hverandre i et punkt $(2, 3)$ og dette punktet er den eneste løsningen.

I et annet eksempel

$$\begin{cases} \;\; x + \;\; y = 1 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$$

får vi to parallelle linjer. Ingen felles punkter, altså ingen løsninger av ligingssettet.

I et tredje eksempel

$$\begin{cases} \;\; x - \;\; y = 1 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$$

får vi at linjene sammenfaller, og uendelige mange løsninger: alle punkter på linja definert av $y = x - 1$.

Vi merker oss altså at løsningsmengden er enten tom, et punkt eller ei linje.

Her er et eksempel med 2 liginger og 3 ukjente.

$$\begin{cases} 3x + 5y - 2z = 14 \\ \;\; x - 9y + 7z = 0 \end{cases}$$

> Oppgave: Hva kan vi si om løsningene til system av to ligninger med tre ukjente? Hva er geometrisk tolkning av løsningsmengden? Hva kan vi si om løsningsmengden for tre ligninger med tre ukjente?

Vi skal finne metoder for å løse slike ligningsett, altså finne verdier for variablene som oppfyller alle ligningene, og vi skal finne metoder og utvikle teori for å beskrive mengden av alle løsninger. De viktigste verktøyene for å gjøre dette er matriser og vektorer. Vi skal bruke mye tid og tankekraft på å beskrive og tolke det vi gjør geometrisk.

Vektorer

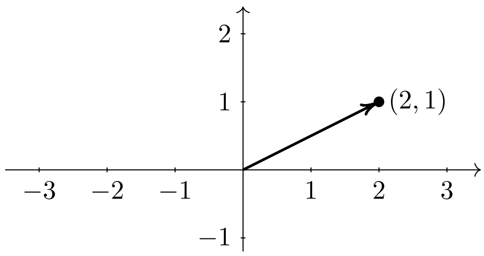
Elementer i $\mathbb{R}^n$ skal vi ofte tenke på som søyle- (eller kolonne-)vektorer

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

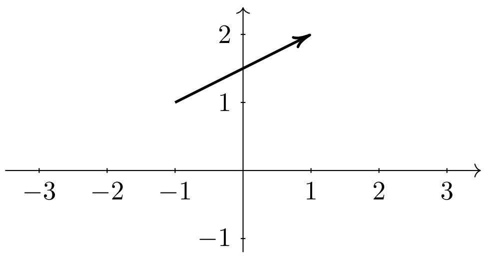
noen ganger som radvektorer

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$$

noen ganger som bare som punkter (x, y, z), noen ganger (når $n \leq 3$) som piler fra origo til punktet



og noen ganger som piler parallelle til slike.



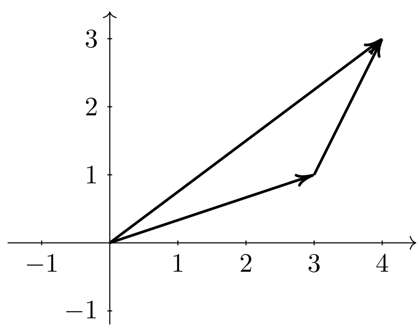
Vanligvis vil vi tenke på de som søylevektorer. Vi kan addere søylevektorer

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

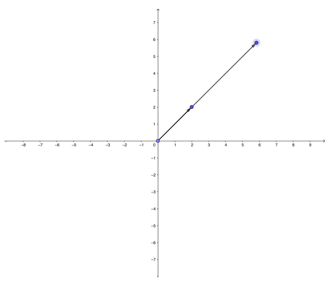
og vi kan gange søylevektorer med et tall t (skalarmultiplikasjon)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \cdot t = \begin{bmatrix} tx_1 \\ tx_2 \\ \vdots \\ tx_n \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Både addisjon og skalarmultiplikasjon har velkjente geometriske tolkninger i $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$.



Addisjon av vektorer: $[3,1]+[1,2]=[4,3]$



Skalarmultiplikasjon $3 \cdot [2,2] = [6,6]$.

Ligningsettene våre skal vi oversette fra m ligninger med n ukjente tall, til én ligning med n ukjente vektorer i $\mathbb{R}^m$.

Oppgave:
1) Betrakt systemet

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

Oversatt til vektorer

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot y = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hvorfor ingen løsning?

2) Betrakt systemet

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases}$$

Oversatt til vektorer

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot y = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Hvor mange løsninger? Hvis vi bruker vektornotasjon også for alle løsningene, hvordan beskrive alle vektorer $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ som løser systemet?

Matriser

Vi skal altså se på systemer av m ligninger med n ukjente.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

På vektorform blir dette

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \cdot x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \cdot x_2 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \cdot x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

For å håndtere slike ligningsett skal vi bruke *matriser*. Matriser er bare tabeller av tall.

Matrisa som består av koeffisientene til ligningsettet

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

kaller vi *koeffisientmatrisen* til ligningssystemet. Hvis vi utvider den med en kolonne som tilsvarer løsningene b_i

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

får vi *totalmatrisen*, også kalt den *utvidete matrisen* til ligningssystemet.

Vi skal definere visse *matriseoperasjoner*, som gir oss metoder for å løse slike ligningssett.

Matriseligninger

Vi skal tenke på prikkproduktet (skalarproduktet) av to vektorer $\mathbf{c}$ og $\mathbf{d}$ i $\mathbb{R}^n$ på følgende måte. Vi skriver den ene vektoren som en radvektor

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

og den andre som en kolonnevektor

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

Så lar vi

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} = c_1 d_1 + c_2 d_2 + \cdots + c_n d_n$$

Vi ganger altså radvektorer med n elementer med kolonnevektorer med n elementer, og får et tall ut.

Dette kan vi utvide til å gange $m \times n$-matriser (altså m rader) med en kolonnevektor i $\mathbb{R}^n$, slik at resulltatet blir en vektor i $\mathbb{R}^m$. Dette gir oss en måte å skrive om ligningssystemet

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

til en ligning på formen

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Altså får vi en ligning på formen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

der A og $\mathbf{b}$ er kjente (hhv en matrise og en vektor), og $\mathbf{x}$ er en ukjent vektor.

Hvis vi sammenligner dette med vår aller enkleste lineære ligning i én variabel

$$ax = b$$

er det fristende å spørre: Kan vi «dele» på A? Vi skal se at når $m = n$, så kan vi noen ganger det, men ikke alltid. Og det er akkurat når det opprinnelige ligningssettet har nøyaktig en løsning, at vi kan «dele».

Lineærtransformasjoner og generelle vektorrom

Hvis A er en $m \times n$-matrise A kan vi altså gange med en n-dimensjonal vektor $\mathbf{x}$ på høyre side og få en m-dimensjonal vektor $\mathbf{y}$ ut. Med andre ord: Å gange med A gir oss en funksjon $f_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Dette er et eksempel på en *lineærtransformasjon*, som vi skal på senere i emnet.

Vi skal også abstrahere litt. Vi skal se på mengder som oppfører seg lignende som $\mathbb{R}^n$, og kalle de *n-dimensjonale vektorrom*. Eksempler på slike vil være mengen av alle polynomer med koeffisienter i $\mathbb{R}$ av grad $< n$.

Komplekse tall

Vi skal også introdusere komplekse tall i dette emnet. Fra skolen har dere lært først om naturlige tall $\mathbb{N}$, så utvidet til heltall $\mathbb{Z}$, så til rasjonale tall $\mathbb{Q}$, og så til reelle tall $\mathbb{R}$, vi har altså:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

Vi skal så gjøre den ultimate utvidelse, til komplekse tall $\mathbb{C}$, som vil gjøre oss i stand til å gi en formell løsning av ligninger som $x^2 = -1$.

Tenk først på vektorer i $\mathbb{R}^2$ på formen $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Vi har allerede en måte å addere slike

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + c \\ b + d \end{bmatrix}$$

Nå finner vi på en ny gangeregel, nemlig

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac - bd \\ bc + ad \end{bmatrix}$$

Merk da at

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Vi skal tenke på $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ som et tall $a + bi$. Spesielt er altså $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ tallet $0 + 1i = i$, og ligningen (1) sier da at $i^2 = -1$.

Vi har da en løsning av ligningen $x^2 = -1$. Og vi skal se at alle andregradsligninger blir løsbare.

> Oppgave: Finn kvadratroten av -2, altså finn $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ slik at
>
> $$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lineære differensialligninger

En *differensialligning* er en ligning der den ukjente er en funksjon, og der den deriverte (og/eller høyere deriverte) av denne ukjente funksjonen inngår i ligningen.

Vi skal se på to forskjellige typer differensialligninger. Den ene typen er lineære andreordens differensialligninger, som vil si ligninger på formen

$$y'' + py' + qy = g,$$

der y er en ukjent funksjon av en variabel t, og g er en kjent funksjon av t, og p og q er konstanter.

Når vi skal løse en slik ligning får vi bruk for å lage en «hjelpeligning», nemlig andregradsligningen

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

der λ er den ukjente, og p og q er de samme konstantene som vi hadde i differensialligningen. Løsningene av denne ligningen vil gi informasjon om hvordan løsningene av differensialligningen ser ut. Avhengig av hva p og q er, er det ikke sikkert at denne andregradsligningen har noen løsning i reelle tall, men vi kan alltid finne komplekse tall som er løsninger av hjelpeligningen vår, og disse kan vi igjen bruke til å finne løsningene av differensialligningen vi startet med.

Den andre typen differensialligninger vi skal se på er systemer av førsteordens lineære differensialligninger, som vil si ligningssystemer på formen

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \quad\vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

der koeffisientene a_{ij} er konstanter og hver x_i er en ukjent funksjon av t.

Når vi har lært om lineær algebra og matriser, ser vi at et slikt system også kan skrives på den mer kompakte formen

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x},$$

der $\mathbf{x}$ er en vektorfunksjon og A er en matrise. For å løse systemet vil vi bruke avanserte lineæralgebraiske metoder.