Kapittel 3

Vektorligninger

I denne uken skal vi bruke enkel vektorregning til å analysere lineære ligningssystemer. Vi skal ha et spesielt fokus på $\mathbb{R}^3$, for det går an å visualisere; klarer man det, går det lettere å abstrahere til $\mathbb{R}^n$. Vi skal også abstrahere til $\mathbb{C}^n$, som er rommet av alle vektorer med komplekse koeffisienter.

Senere i kurset skal vi se hvordan noen av konseptene under kan generaliseres, slik at vi kan konstruere teori som for matematiske strukturer som tilsynelatende er veldig forskjellige, men som viser seg å følge akkurat de samme lovene.

Vektorregning

Inntil videre tenker vi på vektorer som søylevektorer:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Dersom komponentene er reelle, kan vi tenke på dette som et punkt i $\mathbb{R}^n$, og er de komplekse, tenker vi at det er et punkt i $\mathbb{C}^n$. De to viktigste regnereglene for vektorer er skalarmultiplikasjon

$$a\mathbf{x} = \begin{bmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \vdots \\ ax_n \end{bmatrix}$$

og vektoraddisjon

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}.$$

En vektor på formen

$$a\mathbf{x} + b\mathbf{y} = a\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + by_1 \\ ax_2 + by_2 \\ \vdots \\ ax_n + by_n \end{bmatrix}$$

sies å være *lineærkombinasjon* av vektorene $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$. Skalarene a og b kalles vekter, og de kan være reelle eller komplekse, alt etter om vi opererer i $\mathbb{R}^n$ eller $\mathbb{C}^n$. Inntil videre skal vi begrense oss til å gange reelle vektorer med reelle skalarer, og komplekse vektorer med komplekse skalarer, men det ligger ingen nødvendighet i dette.

Har vi m vektorer $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, sies en vektor på formen

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + ... + a_m\mathbf{x}_m$$

å være en lineærkombinasjon av vektorene $\mathbf{x}_i$, med vekter a_i.

Hvis vi har m vektorer $\mathbf{x}_k$ i $\mathbb{R}^n$ eller $\mathbb{C}^n$, definerer vi *det lineære spennet*, eller

$$\mathrm{Sp}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_m\}$$

som delmengden av $\mathbb{R}^n$ eller $\mathbb{C}^n$ bestående av alle vektorer på formen

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + ... + a_m\mathbf{x}_m,$$

altså alle lineærkombinasjoner av vektorene.

Eksempel 3.1. Vi tar et eksempel i $\mathbb{R}^n$.

$$3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 16 \\ 21 \end{bmatrix}$$

Spennet til vektorene i eksemplet over, er alle vektorer i $\mathbb{R}^3$ på formen

$$a\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix},$$

der a og b er reelle tall. △

Eksempel 3.2. Så et eksempel i $\mathbb{C}^n$.

$$3\begin{bmatrix} i \\ 1-2i \\ 3 \end{bmatrix} + (2-i)\begin{bmatrix} 2+i \\ 5i \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+3i \\ 8+4i \\ -3+6i \end{bmatrix}$$

Spennet til vektorene over, er alle vektorer i $\mathbb{C}^3$ på formen

$$a\begin{bmatrix} i \\ 1-2i \\ 3 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 2+i \\ 5i \\ -6 \end{bmatrix},$$

der a og b er komplekse tall. △

Beskriv det lineære spennet til mengdene:

1) $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$ i $\mathbb{R}^2$

2) $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ i $\mathbb{R}^3$

3) $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$ i $\mathbb{R}^2$

4) $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ i $\mathbb{R}^3$

5) $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$ i $\mathbb{R}^3$

6) $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ i $\mathbb{R}^3$

7) $\{[1]\}$ i $\mathbb{C}$

8) $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$ i $\mathbb{C}^2$

9) $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$ i $\mathbb{C}^2$

Vektorligninger

Det meste av lineær algebra dreier seg om vektorer, og problemer som kan formuleres ved hjelp av vektorer. Vi har allerede sett at lineære ligningssystemer kan formuleres ved hjelp av vektorer. Ligningssystemet fra forrige uke

$$\begin{cases} x+2y-2z=-5\\ x+5y+9z=33\\ 2x+5y-\ \ z=0\end{cases}$$

kan skrives som en *vektorligning* i $\mathbb{R}^3$:

$$x\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}2\\5\\5\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}-2\\9\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\33\\0\end{bmatrix}.$$

Dette gir oss en ny måte å se ligningssystemer på: oppgaven er å finne vektene x, y og z slik at søylene i matrisen lineærkombineres til å bli lik høyresiden.

Eksempel 3.3. Systemet over har nøyaktig én løsning, nemlig

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\-2\\4\end{bmatrix},$$

og du kan verifisere at

$$7\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}2\\5\\5\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}-2\\9\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\33\\0\end{bmatrix}.$$

△

Eksempel 3.4. I forrige uke løste vi systemet

$$\begin{aligned}(1-i)z+3w&=2-3i\\ iz+(1+2i)w&=1\end{aligned}$$

og fant at $z=1+i.$ og $w=-i$. Du kan verifisere at

$$1+i\begin{bmatrix}1-i\\i\end{bmatrix}+(-i)\begin{bmatrix}3\\1+2i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-3i\\1\end{bmatrix}.$$

△

Geometrisk tolkning av vektorligninger: Eksistens og entydighet av løsninger

Ligningssystemer deler seg naturlig i tre kategorier; de som har en unik løsning, de som har ingen løsning, og de som har uendelig mange løsninger. Vi skal nå gi noen geometriske illustrasjoner i $\mathbb{R}^3$ av hva som skjer i de forskjellige tilfellene.

Eksempel 3.5. Vektorligningen

$$x\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix}$$

har uendelig mange løsninger. Den utvidede matrisen er

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&2\\1&1&0&2\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

som har redusert trappeform

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&2\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

Velger vi $z=t$ som fri variabel, får vi generell løsning

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

Her er geometrisk forklaring: Siden de tre vektorene

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$$

alle ligger i samme plan (i dette tilfellet xy-planet), og $\begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix}$ også ligger i det samme planet, er det uendelig mange måter å løse vektorligningen på. △

Eksempel 3.6. Vektorligningen

$$x\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

har ingen løsninger. Den utvidede matrisen er

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\1&1&0&0\\0&0&0&1\end{array}\right]$$

Vi ser at den tredje raden tilsvarer den uløselige ligningen $0=1$. Vektoren $\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ ligger ikke i xy-planet, altså den er ikke i

$$\operatorname{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\},$$

og følgelig har ligningssystemet ingen løsning. △

Eksempel 3.7. Vektorligningen

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

har nøyaktig en løsning. Den utvidede matrisen er

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

som har redusert trappeform

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Den unike løsningen er altså

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Det lineære spennet

$$\mathrm{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

er hele $\mathbb{R}^3$. En hver vektor i $\mathbb{R}^3$ kan utspennes av disse tre på nøyaktig én måte. △

Vi sniker inn et eksempel i $\mathbb{C}^3$ også. Det er viktig å forstå at lineær algebra fungerer omtrent likt i $\mathbb{C}^n$ som i $\mathbb{R}^n$, det er bare vanskeligere å visualisere.

Eksempel 3.8. Vektorligningen

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 1+i \\ 2-i \end{bmatrix}$$

har nøyaktig én kompleks løsning. Den utvidede matrisen er

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & i \\ 1 & 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 0 & 1 & 2-i \end{array}\right]$$

som har redusert trappeform

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2-i \end{array}\right]$$

Den unike løsningen er altså

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 2-i \end{bmatrix}$$

Det lineære spennet

$$\mathrm{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

er hele $\mathbb{C}^3$, og en hver vektor i $\mathbb{C}^3$ kan utspennes av disse tre på nøyaktig én måte. △

I de to siste eksemplene har vi uttalt tilsynelatende motstridende utsagn som at det lineære spennet

$$\mathrm{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

er både hele $\mathbb{R}^3$ og hele $\mathbb{C}^3$. Begge deler er riktig, for det kommer an på om man tillater vekter fra $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. Dette skal vi komme tilbake til senere i emnet.

En forsmak på lineær uavhengighet

Eksemplene over illustrerer et av de viktigste konseptene i dette kurset - nemlig *lineær avhengighet.* Dette konseptet er så viktig at det får et eget kapittel litt senere, men i dette avsnittet skal vi gi en liten pekepinn på hva som kommer.

I eksemplene over var det lett å se om vektorene lå i samme plan eller ikke. Det er ikke alltid tilfelle, og vi begynner med et eksempel der det ikke er åpenbart.

Eksempel 3.9. La oss utføre gausseliminasjon på systemet

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Den utvidete matrisen er

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 3 \end{array}\right],$$

og vi får

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right].$$

De to nederste linjene sier at $x_2 + 2x_3$ skal være både 2 og 5. Dette er åpenbart umulig, og systemet har ingen løsning.

Vi analyserer matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

De to første søylene $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ utspenner et plan i $\mathbb{R}^3$. Den tredje søylen er en lineær kombinasjon av de to første. For å se dette må vi finne vekter a og b slik at

$$a \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix},$$

altså løse ligningssystemet med utvidet matrise

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right]$$

Trappeform av systemet er

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

mens redusert trappeform er

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

og følgelig er $a = -1$ og $b = 2$ en løsning. Vi verifiserer:

$$-\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Altså ligger de tre søylene i samme plan. Ligningssystemet

$$x_1\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

har ingen løsning, siden høyresiden ikke ligger i dette planet. △

Eksempel 3.10. Hvis vi derimot utfører gausseliminasjon på systemet med totalmatrise

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 12 \\ 4 & 5 & 6 & 15 \end{array}\right],$$

får vi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right].$$

De tre søylene i matrisen ligger som vi har sett i samme plan i $\mathbb{R}^3$, men nå ligger tilfeldigvis høyresiden også i dette planet, og systemet kan derfor løses på uendelig mange måter. △

Oppgave: Vis at søylevektoren $\begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \end{bmatrix}$ fra det siste eksempelet, ligger i planet utspent av de tre søylevektorene til

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Hvis man har en samling vektorer, sier vi at de er lineært avhengige dersom en av vektorene i samlingen kan skrives som en lineærkombinasjon av de andre. Vi har sett at dette er tilfellet dersom tre vektorer i $\mathbb{R}^3$ ligger i samme plan.

Eksempel 3.11. I eksempel 3.9 over fant vi at

$$-\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

og dette forteller oss at vektoren $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ ligger i planet utspent av $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$. Men vi kunne jo like gjerne skrevet

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

eller

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

En mer generell teknikk for å finne ut om vektorene ligger i samme plan, er å utføre gausseliminasjon på systemet

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi får

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

altså at

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 0 \\ \qquad\; y + 2z = 0 \end{cases}.$$

Setter vi $z = s$, får vi $y = -2s$ av den siste ligningen, og $x = s$ av den første, slik at

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er en løsning av systemet for vilkårlige s. Dette betyr at

$$s\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - 2s\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

for alle valg av s. △

Når du skal analysere systemer med tre ligninger og tre ukjente, hjelper det å vite om vektorene på venstresiden av systemet ligger i samme plan eller ikke. I mer enn tre dimensjoner er det mer komplisert, men det siste eksemplet gir en pekepinn om hva vi er ute etter. Dersom en relasjon

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} = 0$$

der ikke $a = b = c = 0$ eksisterer mellom vektorene $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$, sier vi at vektorene er *lineært avhengige.* Hvis ligningen

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} = 0$$

kun løses av $a = b = c = 0$, sier vi at vektorene er *lineært uavhengige.*

Eksempel 3.12. Vektorene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2i \\ 3+i \end{bmatrix}$$

og

$$\begin{bmatrix} 1+i \\ -2+2i \\ 2+4i \end{bmatrix}$$

er lineært avhengige, siden

$$(1+i)\begin{bmatrix} 1 \\ 2i \\ 3+i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1+i \\ -2+2i \\ 2+4i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$ △

En forsmak på determinanter

Vi skal senere se at vi for kvadratiske matriser kan regne ut et tall, en *determinant*, som gir viktig informasjon om matrisens egenskaper. Motivasjonen for dette kommer fra volumberegninger i $\mathbb{R}^3$.

Eksempel 3.13. Ligningssystemet

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 33 \\ 0 \end{bmatrix}$$

har som vi har sett en unik løsning. Hvis du bytter ut vektoren på høyre side med hva som helst, vil systemet fremdeles ha en unik løsning. Grunnen er at de tre vektorene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ikke ligger i samme plan. △

Vi kan tenke at tre vektorer $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ i $\mathbb{R}^3$ danner tre sidekanter i et parallellepiped. Du husker forhåpentligvis fra skolematematikken at volumet av dette parallellepipedet er gitt ved

$$|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|.$$

Du kan avgjøre hvorvidt tre vektorer i $\mathbb{R}^3$ ligger i samme plan ved å beregne dette volumet. Dersom volumet blir 0, ligger de i samme plan.

Eksempel 3.14. Søylene i matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

danner et parallellepiped med volum 2:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -50 \\ -8 \\ 28 \end{bmatrix} = -2.$$

Søylene ligger derfor ikke i samme plan. △

Dersom søylene i matrisen A kalles $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$, er *determinanten* til A definert ved

$$\det A = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}),$$

og volumet til parallellepipedet skrives $|\det A|$.

Eksempel 3.15. Vi har sett at søylene i matrisen fra Eksempel 3.8 ligger i samme plan. Vi har

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = 0.$$

som forventet. △

Presise kriterier for når et ligningssystem har én, ingen, eller mange løsninger, får vi ikke uten litt mer matematisk maskineri. Men et mentalt bilde av 3×3-systemer i $\mathbb{R}^3$ kan vi lage oss.

- Hvis matrisens søyler ikke ligger i samme plan, og dermed danner et parallellepiped med volum > 0 har systemet en unik løsning uansett høyreside.
- Hvis matrisens søyler ligger i samme plan, og høyresiden ikke ligger i dette planet, har systemet ingen løsning.
- Hvis matrisens søyler ligger i samme plan, og høyresiden ligger i dette planet, har systemet uendelig mange løsninger.

Eksempel 3.16. Du kan fint regne ut determinanten til en kompleks matrise:

$$\det \begin{bmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 2 & i \end{bmatrix} = -3 - 3i$$

Men da blir det ikke noe volum. Det er ikke så godt å si hva det blir. △