Kapittel 7

Vektorrom

Vårt mål i dette kapitlet og det neste er å generalisere og abstrahere ideene vi har jobbet med til nå. Især skal vi stille spørsmålet

Hva er en vektor?

Svaret vi skal gi, vil virke litt omstendelig og abstrakt. Fordi vi skal først definere begrepet *vektorrom* som er bygd på egenskapene vi er vant til fra rommene vi allerede har studert som $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$. Men vi skal kun ta hensyn til de egenskapene som har vært viktige for oss så langt, for eksempel da vi studerte ligningssystemer.

Det fører til at definisjonen av vektorrom kommer til å være så generell at vi også kan ha vektorrom som ser helt annerledes ut enn $\mathbb{R}^n$. At en mengde objekter danner et vektorrom, betyr at den er *organisert på en pen, dvs lineær, måte.* Dette fører til at vi skal bli vant til at vektorer kan være mye mer enn kolonnevektorene vi kjenner til – for eksempel kan en funksjon eller en matrise også være en vektor. Det vil være veldig nyttig for eksempel når vi studerer løsningsmengden av et system av differensialligninger.

Det viser at det ikke gir mening å se på en vektor for seg selv, men bare sammen med mengden av alle andre vektorer i det samme vektorrommet. Til syvende og sist fører dette til en ny og mer presis definisjon av en vektor:

En vektor er et element i et vektorrom.

I neste kapittel skal vi innføre det andre sentrale konseptet vi trenger for å drive med lineær algebra på en generell måte, nemlig *lineærtransformasjoner.* En lineærtransformasjon er en funksjon fra et vektorrom til et annet. Men den kan ikke være en hvilken som helst funksjon – vi krever at den skal *bevare vektorromsstrukturen.*

Den generelle formuleringen av lineær algebra ved hjelp av vektorrom og lineærtransformasjoner gir flere fordeler. Den gir oss et språk og en del teknikker som (etter hvert som vi blir vant til dem) gjør mange problemer mye mer lettfattelige. Og den gjør at vi kan anvende lineær algebra innen andre områder av matematikk, for eksempel til å løse differensialligninger, som vi skal se på senere.

Vi kan stille oss selv spørsmålet

Hva handler lineær algebra egentlig om?

Hva som er et naturlig svar på dette spørsmålet endrer seg etter hvert som vi lærer mer lineær algebra. Helt i begynnelsen ville vi antagelig sagt at lineær algebra handler om å løse lineære ligningssystemer. Litt senere kunne vi si at lineær algebra handler om vektorer og matriser. Etter at vi har kommet oss gjennom dette kapitlet og det neste, vil vi antagelig besvare spørsmålet med:

Lineær algebra handler om vektorrom og lineærtransformasjoner.

Hva kan vi gjøre med vektorer?

Vi er vant til kolonnevektorer i $\mathbb{R}^2$ og i $\mathbb{C}^3$, og mer generelt i $\mathbb{C}^n$. Det er flere operasjoner vi kan utføre med dem. For eksempel kan vi alltid legge sammen to kolonnevektorer som begge er i $\mathbb{C}^2$ og vi kan gange en kolonnevektor i $\mathbb{C}^2$ med et reelt tall og får igjen en kolonnevektor i $\mathbb{C}^2$.

Men det gir ikke mening å legge sammen en kolonnevektor i $\mathbb{C}^2$ med en kolonnevektor i $\mathbb{C}^3$:

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 2i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ i \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{er ikke definert.}$$

Når vi legger sammen to kolonnevektorer i $\mathbb{C}^2$, blir summen igjen en kolonnevektor i $\mathbb{C}^2$, og når vi ganger en vektor i $\mathbb{C}^2$ med en skalar, får vi også en kolonnevektor i $\mathbb{C}^2$ som resultat. Vi holder oss altså alltid innenfor den samme verdenen når vi tar lineærkombinasjoner av kolonnevektorer. En slik verden av vektorer vi kan legge sammen eller gange med et tall og får en ny vektor, er det vi kaller et vektorrom.

Som i $\mathbb{C}^n$ vil vi ha to operasjoner for vektorer: vi kan legge sammen vektorer, og vi kan gange en vektor med et tall:

$$\begin{aligned} \text{addisjon av vektorer:} \quad & \mathbf{u} + \mathbf{v} \\ \text{skalarmultiplikasjon:} \quad & c \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

Begge operasjonene gir ut nye vektorer som resultat.

Et tall vil være for oss enten et reelt eller et kompleks tall. I sammenheng med vektorer er det vanlig å kalle et tall en *skalar* for å skille dem fra vektorer.

Vi vil kunne regne med disse to operasjonene på den samme måten som med kolonnevektorer i $\mathbb{C}^n$. Det betyr at addisjon og skalarmultiplikasjon oppfyller visse kriterier. Disse kriteriene kaller vi *aksiomene* for et vektorrom.

Aksiomer for vektorrom

Aksiomene for vektorrom er åtte regneregler som holder for kolonnevektorene i $\mathbb{R}^n$, og som er essensielle for at vektorer skal oppføre seg slik vi synes at vektorer skal oppføre seg. Vi nummerer aksiomene (V1), (V2), ..., (V8). Du finner alle sammen i en fin liste på side 3. Vi skal nå forklare hva disse aksiomene betyr.

Det første aksiomet, (V1), sier at det ikke har noe å si hvor vi setter parentesene når vi legger sammen vektorer:

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

Dette betyr at vi kan skrive en sum

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$$

uten parenteser, fordi vi får samme resultat om vi legger sammen $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ først, eller legger sammen $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ først. Mer generelt betyr det at vi kan skrive alle slags lengre summer

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots \mathbf{u}_n$$

uten parenteser. På fint matematikkspråk kalles dette at addisjonen er en *assosiativ* operasjon.

Dette ser kanskje så åpenbart ut at det ikke skulle være nødvendig å gjøre noe stort nummer ut av det. Men det er likevel nødvendig å ha det med som et krav, fordi vi i utgangspunktet sier at vi kan definere vektoraddisjonen til å gjøre akkurat hva vi vil, og det er fullt mulig å definere en operasjon som ikke er slik at parenteser kan flyttes fritt.

For å gjøre det helt klart at assosiativitet ikke er noe vi kan ta for gitt, kan det være nyttig å tenke på at du kjenner godt til minst én operasjon som ikke er assosiativ, nemlig opphøyd-i-operasjonen. Med den operasjonen har det en betydning hvor vi setter parentesene, for

$$(a^b)^c \quad \text{og} \quad a^{(b^c)}$$

er ikke det samme.

Aksiom (V2) sier at rekkefølgen ikke spiller noen rolle når vi adderer vektorer:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

Det fine navnet på denne egenskapen er at addisjonen er *kommutativ.*

Aksiom (V3) sier at det skal finnes en *nullvektor.* I $\mathbb{R}^n$ er vi vant til å si at nullvektoren er kolonnevektoren som består av bare nuller. Men nå vil vi definere nullvektoren ut fra hvordan den oppfører seg med hensyn på addisjonsoperasjonen. Den definerende egenskapen for en nullvektor $\mathbf{0}$ er at det å legge til nullvektoren ikke endrer noe, altså at

$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$$

for alle vektorer $\mathbf{u}$.

Aksiom (V4) sier at hver vektor har en *additiv invers.* Det betyr at for hver vektor $\mathbf{u}$ skal det være mulig å finne en vektor $\mathbf{v}$ slik at

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Vektoren $\mathbf{v}$ er da den additive inversen til $\mathbf{u}$, og vi kaller den for $-\mathbf{u}$.

De fire første aksiomene handler bare om addisjonsoperasjonen. De fire siste handler om skalarmultiplikasjon.

Aksiom (V5) sier at skalarmultiplikasjonen er *kompatibel* med det å gange sammen tall, i den forstand at å gange en vektor med ett og ett tall er det samme som å gange sammen tallene først og så multiplisere med vektoren:

$$(ab) \cdot \mathbf{u} = a \cdot (b \cdot \mathbf{u})$$

Aksiom (V6) sier at det å gange en vektor med tallet 1 alltid gir oss den samme vektoren tilbake:

$$1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$$

Vi kan altså si at tallet 1 er et *identitetselement* for skalarmultiplikasjonen.

Aksiomene (V7) og (V8) sier at vi kan gange ut parenteser slik vi er vant med, både når vi har en sum av vektorer og når vi har en sum av tall:

$$a \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$$
$$(a + b) \cdot \mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$$

Dette kalles at skalarmultiplikasjonen er *distributiv* over addisjon.

Definisjonen av vektorrom

Nå er vi klare for å skrive ned definisjonen av vektorrom.

Definisjon. La V være en mengde, og anta at vi har definert to operasjoner:

addisjon av vektorer: $\mathbf{u} + \mathbf{v}$

skalarmultiplikasjon: $c \cdot \mathbf{u}$

Addisjonen skal være definert for alle elementer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i V, og skalarmultiplikasjonen for alle skalarer c og alle $\mathbf{u}$ i V. Resultatet av operasjonene skal alltid være et element i V.

Dersom mengden V og de to operasjonene oppfyller vektorromsaksiomene (V1)–(V8), så sier vi at V er et *vektorrom*, og vi kaller elementene i V for *vektorer.*

Når skalarene er relle tall, så snakker vi om et *reelt vektorrom.* Vi sier også at V er et vektorrom over $\mathbb{R}$. Når skalarene er kompleske tall, så snakker vi om et *komplekst vektorrom* eller at V er definert over $\mathbb{C}$. △

Merk at det finnes vektorrom over enhver kropp. Men vi skal ikke si mer om det i dette semesteret.

Første eksempler

Aksiomene for vektorrom er valgt ut som de egenskapene ved $\mathbb{C}^n$ som anses som å være essensielle. Derfor er selvsagt hver $\mathbb{R}^n$ og hver $\mathbb{C}^n$ et vektorrom. Men poenget med å gi en så generell definisjon er at det også finnes flere vektorrom enn disse.

Som et første eksempel kan vi se at en delmengde av $\mathbb{R}^n$ også kan være et vektorrom. Dette gir oss for eksempel muligheten til å oppfatte løsningsmengden av et ligningssystem som et vektorrom.

Vektorromsaksiomene

aksiomer for addisjon

(V1) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ for alle vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$.
(Vektoraddisjon er en *assosiativ* operasjon.)

(V2) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$ for alle vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$.
(Vektoraddisjon er en *kommutativ* operasjon.)

(V3) Det finnes en vektor $\mathbf{0}$ slik at $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$ for alle vektorer $\mathbf{u}$.
(Vektoraddisjon har et *identitetselement*.)

(V4) For hver vektor $\mathbf{u}$ finnes en vektor $-\mathbf{u}$ slik at $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$.
(Vektoraddisjon har *inverser* for alle elementer.)

aksiomer for skalar-multi-plikasjon

(V5) $(ab)\cdot\mathbf{u}=a\cdot(b\cdot\mathbf{u})$ for alle vektorer $\mathbf{u}$ og alle skalarer a og b.
(Skalarmultiplikasjon er *kompatibel* med multiplikasjon av skalarer.)

(V6) $1\cdot\mathbf{u}=\mathbf{u}$ for alle vektorer $\mathbf{u}$.
(Tallet 1 er *identitetselement* for skalarmultiplikasjon.)

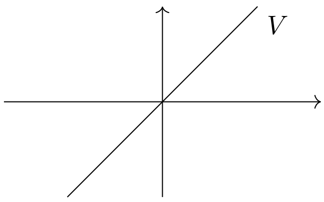
(V7) $a\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})=a\mathbf{u}+a\mathbf{v}$ for alle vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$, og alle skalarer a.
(Skalarmultiplikasjon er *distributiv* over addisjon av vektorer.)

(V8) $(a+b)\cdot\mathbf{u}=a\mathbf{u}+b\mathbf{u}$ for alle vektorer $\mathbf{u}$, og alle skalarer a og b.
(Skalarmultiplikasjon er *distributiv* over addisjon av skalarer.)

Eksempel 7.1. Se på mengden

$$V = \mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

utspent av vektoren $\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]$ i $\mathbb{R}^2$, altså denne linjen:



Hvis vi lar addisjonen og skalarmultiplikasjonen være definert som i $\mathbb{R}^2$, så kan vi sjekke at mengden V i seg selv også blir et vektorrom.

Resultatet av å addere eller skalarmultiplisere vektorer i V blir alltid en vektor i V, slik at det gir mening å definere operasjonene på denne måten.

Nullvektoren $\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]$ i $\mathbb{R}^2$ er med i V og fungerer også som nullvektor for V, slik at aksiom (V3) er oppfylt. For alle vektorer $\mathbf{u}$ i V er også den additive inversen $-\mathbf{u}$ med i V, slik at aksiom (V4) er oppfylt. Vi ser lett at alle de andre aksiomene også holder for V, siden de holder for $\mathbb{R}^2$.

Vektorrommet V er geometrisk sett en linje, akkurat som $\mathbb{R}^1$. Det fungerer altså litt som å plassere en kopi av $\mathbb{R}^1$ på skrå inne i $\mathbb{R}^2$. △

Eksempel 7.2. Mengden $\mathbb{C}$ av komplekse tall med sin addisjon og multiplikasjon er et komplekst vektorrom akkurat som $\mathbb{R}$ er et reelt vektorrom. Men vi kan også oppfatte $\mathbb{C}$ som et reelt vektorrom. Det betyr da at vi oppfatter et komplekst tall som en vektor mens skalarene er de reelle tallene. I dette tilfellet glemmer vi alle andre egenskapene til $\mathbb{C}$ og fokuserer kun på vektorromegenskapene.

På den samme måten er $\mathbb{C}^n$ både et komplekst og et reelt vektorrom. Vi skal komme tilbake til dette viktige eksemplet senere. △

Merk. Generelt kan vi se på *hvert komplekst* vektorrom V også som et *reelt* vektorrom. Vi bare tillater reelle tall som skalarer og bruker skalarmultiplikasjonen kun for reelle tall. Med andre ord glemmer vi at vi også kunne gange med komplekse tall. △

Generelle egenskaper og lineær uavhengighet

Når vi vil vise et utsagn som gjelder i et vektorrom V, så må vi konkludere det fra aksiomene. La oss se på noen eksempler:

1) Det finnes kun en nullvektor. For hvis $\tilde{\mathbf{0}}$ hadde det vært en annen vektor slik at $\mathbf{u} + \tilde{\mathbf{0}} = \mathbf{u}$ for alle vektorer $\mathbf{u}$, så fikk vi fra aksiomene (V2) og (V3):

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} + \tilde{\mathbf{0}} = \tilde{\mathbf{0}} + \mathbf{0} = \tilde{\mathbf{0}}.$$

2) For hver vektor $\mathbf{u}$ finnes kun en vektor $-\mathbf{u}$ med $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. For hvis $\widetilde{-\mathbf{u}}$ også oppfylte $\mathbf{u} + -\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$, så får vi

$$-\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) + (-\tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{u} + (-\tilde{\mathbf{u}}) + (-\mathbf{u}) = -\mathbf{u}.$$

3) For alle vektorer $\mathbf{v}$ har vi

$$0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

For vi vet fra aksiom (V8) at

$$0 \cdot \mathbf{v} = (0 + 0) \cdot \mathbf{v} = 0 \cdot \mathbf{v} + 0 \cdot \mathbf{v}.$$

Fordi det finnes kun en nullvektor i følge 1), må vi ha $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

> Oppgave: Vis at de følgende utsagna er gyldige i alle vektorrom:
> 4) $c \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ for all skalarer c.
> 5) $c \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; c = 0$ eller $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
> 6) $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$ for alle vektorer $\mathbf{u}$.

Merk. Reglene vi nettopp har sjekket, viser at det er helt ufarlig å bruke det samme $+$-tegnet for addisjonen både for vektorer og skalarer.

Før vi ser på flere eksempler så gjør vi noen flere observasjoner. Akkurat som i $\mathbb{R}^n$ eller $\mathbb{C}^n$, kan vi snakke om lineærkombinasjoner av vektorer i et vektorrom V:

La $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ være en samling med vektorer i V. Det lineære spennet $\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ er samlingen av alle lineærkombinasjoner av $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$. Altså alle vektorer på formen

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$$

der a_i er skalarer.

Især kan vi spørre om vektorer er lineært uavhengige.

Definisjon. La $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_n$ være vektorer i vektorromet V. Disse vektorene er *lineært uavhengige* dersom ligningen

$$c_1 \cdot \mathbf{v}_1 + c_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + c_n \cdot \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

ikke har andre løsninger enn den trivielle løsningen $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

I motsatt tilfelle kalles de *lineært avhengige.* △

I et generelt vektorrom kan vi ikke så enkelt oversette en vektorliging til en matrise. Men mange andre kritereir fungerer akkurat som for $\mathbb{C}^n$ og $\mathbb{R}^n$. For eksempel kan vi bruke det samme beviset for å vise det følgende teoremet:

Teorem 7.3. *Gitt n vektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_n$ i et vektorrom V. Hvis*

1. *en av vektorene er en lineærkombinasjon av de andre, eller*
2. *en av vektorene er $\mathbf{0}$,*

så er vektorene lineært avhengige.

Flere eksempler på vektorrom

La oss nå se på noen vektorrom som er virkelig forskjellige fra de gamle og kjente rommene $\mathbb{R}^n$. Vektorrommene vi definerer her vil vi bruke senere, så det er lurt å prøve å bli kjent med dem. For hvert av disse vektorrommene er det lett (men litt tid- og plasskrevende) å sjekke at alle vektorromsaksiomene holder. Du bør prøve å sjekke det selv, for i hvert fall ett av vektorrommene vi ser på.

Polynomer av begrenset grad. Vi skriver $\mathcal{P}_n$ for mengden av alle polynomer av grad n eller lavere, altså alle funksjoner på formen

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i. \end{aligned}$$

Koeffisientene a_i kan være reelle eller komplekse tall. Vi definerer addisjon og skalarmultiplikasjon av polynomer på den åpenbare måten. Hvis

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad \text{og} \quad q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$$

er to polynomer i $\mathcal{P}_n$, så er summen $p+q$ polynomet der vi summerer koeffisientene fra p og q:

$$(p+q)(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) \cdot x^i$$

Skalarmultiplikasjonen definerer vi ved at $c \cdot p$ er polynomet der vi ganger alle koeffisientene i p med c:

$$(cp)(x) = \sum_{i=0}^{n} (c \cdot a_i) \cdot x^i$$

Med disse operasjonene er $\mathcal{P}_n$ et vektorrom.

Alle polynomer. Vi skriver $\mathcal{P}$ for mengden av alle polynomer av vilkårlig grad. Med addisjon og skalarmultiplikasjon definert som i $\mathcal{P}_n$ blir $\mathcal{P}$ også et vektorrom.

Eksempel 7.4. Vi ser på tre funksjoner f, g og h, gitt ved

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2, \\ g(x) &= 3x^2 + x, \\ h(x) &= x^2 - x. \end{aligned}$$

Disse er polynomer av grad 2, så de er vektorer i vektorrommet $\mathcal{P}_2$. Dette betyr at vi kan regne med dem som vektorer – vi kan for eksempel ta lineærkombinasjoner av dem. Lineærkombinasjonen $5f + g$ blir funksjonen gitt ved

$$(5f + g)(x) = 5 \cdot f(x) + g(x) = 8x^2 + x.$$

Siden f, g og h er vektorer, kan vi også spørre om de er lineært uavhengige. Ved å prøve oss frem litt med lineærkombinasjoner av de tre vektorene, finner vi ganske raskt ut at

$$-4f + g + h = 0,$$

som betyr at f, g og h er lineært avhengige. $\triangle$

Kontinuerlige funksjoner. Vi skriver $\mathcal{C}(D)$ for mengden av alle kontinuerlige funksjoner definert på et område $D \subseteq \mathbb{R}$. For eksempel, kan D være et interval som $(3,5)$ eller hele $\mathbb{R}$ osv. Mengden $\mathcal{C}(D)$ består altså av alle funksjoner som er på formen

$$f\colon D \to \mathbb{R}$$

og er kontinuerlige.

Vi kan definere addisjon og skalarmultiplikasjon av funksjoner på en naturlig måte. Summen $f+g$ av to funksjoner f og g blir en funksjon gitt ved

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

og produktet cf av en skalar c og en funksjon f blir en funksjon gitt ved

$$(cf)(x) = c \cdot (f(x)).$$

Med disse operasjonene blir mengden $\mathcal{C}(D)$ et vektorrom.

> Spørsmål: Hva er nullvektoren i $\mathcal{C}(D)$?

Eksempel 7.5. La f og g være funksjonene gitt ved

$$f(x) = \sin x \qquad \text{og} \qquad g(x) = \cos x.$$

Da kan vi se på f og g som vektorer i vektorrommet $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ av kontinuerlige funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$. $\triangle$

> Oppgave: Sjekk om vektorene f og g er lineært avhengige eller uavhengige.

Deriverbare og glatte funksjoner. Vi skriver $\mathcal{C}^1(D)$ for mengden av alle funksjoner

$$f\colon D \to \mathbb{R}$$

som er kontinuerlig deriverbare. Mer generelt skriver vi $\mathcal{C}^n(D)$ for mengden av alle funksjoner som er n ganger kontinuerlig deriverbare. Funksjoner som er deriverbare uendelig mange ganger kalles *glatte* funksjoner, og vi skriver $\mathcal{C}^\infty(D)$ for mengden av alle glatte funksjoner fra D til $\mathbb{R}$.

Med addisjon og skalarmultiplikasjon definert på samme måte som i $\mathcal{C}(D)$ blir mengdene $\mathcal{C}^n(D)$ og $\mathcal{C}^\infty(D)$ også vektorrom.

Uendelige lister. Vi skriver $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ for mengden av alle uendelige lister

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$$

av reelle tall. Vi definerer addisjon og skalarmultiplikasjon for slike lister ved:

$$\begin{aligned} (a_i)_{i\in\mathbb{N}} + (b_i)_{i\in\mathbb{N}} &= (a_i + b_i)_{i\in\mathbb{N}} \\ c \cdot (a_i)_{i\in\mathbb{N}} &= (c \cdot a_i)_{i\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

Da er $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ et vektorrom.

Eksempel 7.6. Se på de tre vektorene

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= (1, 2, 3, 4, 5, \ldots)\\ \mathbf{v} &= (1, 1, 1, 1, 1, \ldots)\\ \mathbf{w} &= (1, 3, 5, 7, 9, \ldots)\end{aligned}$$

i vektorrommet $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Er vektoren $\mathbf{w}$ en lineærkombinasjon av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$?

Hvis vi ganger $\mathbf{u}$ med to, så får vi:

$$2\mathbf{u} = (2, 4, 6, 8, 10, \ldots)$$

Nå kan vi trekke fra $\mathbf{v}$ og ende opp med:

$$2\mathbf{u} - \mathbf{v} = (1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$$

Vi ser altså at $\mathbf{w} = 2\mathbf{u} - \mathbf{v}$, så vi kan konkludere med at vektoren $\mathbf{w}$ er en lineærkombinasjon av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$. $\triangle$

Matriser. Vi skriver $\mathcal{M}_{m\times n}$ for mengden av alle $m \times n$-matriser. Vi har allerede (i et tidligere kapittel) definert hvordan vi legger sammen matriser, og hvordan vi ganger en skalar med en matrise. Med disse operasjonene er $\mathcal{M}_{m\times n}$ et vektorrom. Siden kvadratiske matriser er spesielt interessante, definerer vi en egen notasjon, $\mathcal{M}_n$, for vektorrommet som består av alle $n \times n$-matriser.

Underrom

I eksempel 7.1 så vi at en linje i $\mathbb{R}^2$ kunne være et vektorrom i seg selv. Et slikt vektorrom som ligger inni et annet vektorrom kalles et underrom.

Definisjon. Et *underrom* av et vektorrom V er en delmengde $U \subseteq V$ som i seg selv utgjør et vektorrom, med addisjon og skalarmultiplikasjon definert på samme måte som i V. $\triangle$

Eksempel 7.7. Som i eksempel 7.1 lar vi U være delmengden

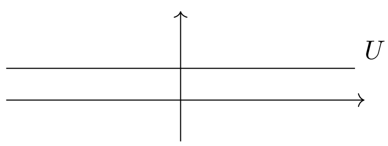
$$U = \operatorname{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

av $\mathbb{R}^2$. Da er U et underrom av $\mathbb{R}^2$. $\triangle$

Eksempel 7.8. Se på mengden

$$U = \left\{\begin{bmatrix}a\\1\end{bmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{R}\right\}$$

av alle vektorer i $\mathbb{R}^2$ på formen $\left[\begin{smallmatrix}a\\1\end{smallmatrix}\right]$, altså den horisontale linjen vist her:



Er U et underrom av $\mathbb{R}^2$?

Hvis U skal være et underrom, må vi ha at U i seg selv blir et vektorrom når vi bruker vektoraddisjonen og skalarmultiplikasjonen fra $\mathbb{R}^2$. Men det gir ikke fungerende operasjoner på U. For eksempel har vi at $\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$ og $\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]$ er vektorer i U, men summen

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

er ikke i U. Operasjonene fra $\mathbb{R}^2$ fungerer altså ikke til å gjøre U til et vektorrom, så U er ikke et underrom av $\mathbb{R}^2$. $\triangle$

> Spørsmål: Er mengden
>
> $$M = \left\{\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 | a \geq 0, b \geq 0\right\}$$
>
> et underrom av $\mathbb{R}^2$?

I eksempel 7.8 så vi at mengden U ikke ble et underrom fordi vi ikke holder oss innenfor U når vi legger sammen vektorer fra U. Vi sier da at mengden U ikke er *lukket* under addisjon.

Men hvis vi har en delmengde U av et vektorrom V som *er* lukket under både addisjon og skalarmultiplikasjon, og som inneholder nullvektoren, så blir alle vektorromsaksiomene automatisk oppfylt for U fordi de holder i V. Vi har dermed følgende teorem.

Teorem 7.9. *La V være et vektorrom. En delmengde $U \subseteq V$ er et underrom av V hvis og bare hvis følgende tre betingelser er oppfylt.*

1. *Nullvektoren $\mathbf{0}$ i V ligger i U.*
2. *For alle vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i U er også summen $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ i U.*
3. *For alle vektorer $\mathbf{u}$ i U og alle skalarer c er også skalarproduktet $c\mathbf{u}$ i U.*

Eksempel 7.10. I vektorrommet $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ av alle glatte funksjoner kan vi se på delmengden

$$U = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) | f' = f\}$$

av funksjonene som er like deres egen deriverte. Da er U et underrom av $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Alt vi må sjekke, er:

1. Nullvektoren, dvs funksjonen som sender alle elementer i $\mathbb{R}$ til det reelle tallet 0, ligger i U som er klart.
2. For f og g i U har vi $(f+g)' = f' + g' = f + g$. Altså er $f + g$ også i U.
3. For f i U og c et reelt tall er $(cf)' = cf' = cf$. Altså er cf også i U.

$\triangle$

Det er lett å se at en mengde utspent av en liste med vektorer oppfyller disse tre betingelsene. Vi skriver opp det også som et teorem.

Teorem 7.11. *En mengde $\operatorname{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots,\}$ utspent av vektorer i et vektorrom V er alltid et underrom av V.*

Bevis. Mengden $\operatorname{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots\}$ består av alle lineærkombinasjoner av vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …. Uansett hva disse vektorene er, vet vi at nullvektoren er en lineærkombinasjon av dem. Videre ser vi enkelt at summen av to lineærkombinasjoner blir en ny lineærkombinasjon av de samme vektorene, og at en skalar ganger en lineærkombinasjon igjen blir en lineærkombinasjon. Dermed er alle betingelsene fra teorem 7.9 oppfylt. $\square$

Endeligdimensjonale vektorrom

For vektorrommene $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$ har vi et klart begrep om dimensjon. Vår geometriske tolkning av disse rommene tyder på at $\mathbb{R}^2$ er todimensjonalt og at $\mathbb{R}^3$ er tredimensjonalt. Derfor har vi også lyst til å si at $\mathbb{R}^n$ er n-dimensjonalt. Av den samme grunnen skulle $\mathbb{C}^n$ være n-dimensjonalt som et kompleks vektorrom. Men hva er dimensjonen til $\mathbb{C}^n$ som et reelt vektorrom? Mer generelt, hva er dimensjonen av et vilkårlig vektorrom V?

For å få et meningsfylt dimensjonsbegrep skal vi først foreta en veldig grov inndeling av alle vektorrommene. Vi skiller mellom vektorrom som er endeligdimensjonale (og for disse skal vi om en stund se at vi kan definere en dimensjon) og de som ikke er det (for disse må vi bare nøye oss med å si at dimensjonen er uendelig).

Definisjon. Et vektorrom V er *endeligdimensjonalt* hvis det finnes en endelig mengde av vektorere i V som utspenner V. Ellers er V *uendeligdimensjonalt.* △

Alle de «gode gamle» vektorrommene $\mathbb{R}^n$ som vi kjenner fra før er endeligdimensjonale, siden $\mathbb{R}^n$ er utspent av den endelige mengden

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

bestående av de n enhetsvektorene. Den samme mengden av enhetsvektorene utspenner også $\mathbb{C}^n$ som et komplekst vektorrom.

Men når vi vil utspenne $\mathbb{C}^n$ som et *reelt* vektorrom, så trenger vi dobbelt så mange vektorer

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ i \end{bmatrix} \right\}.$$

La oss se på et eksempel et uendeligdimensjonalt vektorrom. I oppgavene skal du sjekke flere eksempler selv.

Eksempel 7.12. Vektorrommet $\mathcal{P}$ av alle polynomer er uendeligdimensjonalt. Hvordan kan vi se det? La

$$\{p_1, p_2, \ldots, p_t\}$$

være en endelig mengde av polynomer i $\mathcal{P}$. Hvert av polynomene p_1, p_2, …, p_t har en grad. La n være den høyeste av disse gradene. Da kan vi ikke skrive et polynom av grad $n+1$ som en lineærkombinasjon av polynomene $p_1, p_2, \ldots, p_t$, så disse utspenner ikke hele $\mathcal{P}$.

Siden vi kan si dette om enhver endelig mengde, kan det ikke finnes noen endelig mengde som utspenner $\mathcal{P}$. Dermed er $\mathcal{P}$ et uendeligdimensjonalt vektorrom. △

> Oppgave: Bestem hvilke av de vektorrommene vi har sett som eksempler som er endeligdimensjonale og hvilke som er uendeligdimensjonale.

Basis

Vi sa at et vektorrom er endeligdimensjonalt hvis det er utspent av en endelig mengde. Nøkkelen til å definere dimensjonen til et vektorrom er å lete etter en minste utspennende mengde, der «minst» betyr at den ikke inneholder noen overflødige vektorer. En slik mengde kalles en *basis* for vektorrommet.

Basiser er essensielle for at vi skal kunne definere dimensjonen til et vektorrom, men er også nyttige til mye annet. Et vektorrom som ikke er $\mathbb{R}^n$ kan være vanskelig å jobbe med, men om vi har en basis, blir det mye mer håndterlig. Heldigvis har vi allerede et kriterium som skiller baser fra tilfeldige lister av vektorer.

Definisjon. En *basis* for et vektorrom V er en liste

$$\mathscr{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)$$

av vektorer som både utspenner V og er lineært uavhengige. △

Merk. Det er to forskjellige måter å definere en basis på. Enten sier man at en basis er en *mengde* med vektorer, eller så sier man (som vi gjør) at en basis er en *liste* med vektorer. Forskjellen er at i en mengde har ikke elementene noen bestemt rekkefølge, mens i en liste er det ett bestemt element som er det første, ett som er det andre, og så videre. Rekkefølgen er ikke viktig for å være en basis. Vi kan velge rekkefølgen som den passer best for oss. Alle andre valg gir også en basis.

Det viktigste med en basis er å ha vektorer som utspenner det aktuelle vektorrommet og er lineært uavhengige, og det har man uansett om man velger å plassere dem i en mengde eller en liste. Forskjellen dukker opp når man vil bruke basisen til å innføre koordinater (som vi skal gjøre ganske snart). Da må elementene i basisen ha en rekkefølge. Hvis vi hadde valgt å definere en basis som en mengde, ville vi fått litt ekstra jobb for å få definert koordinater på en skikkelig måte. △

Eksempel 7.13. La oss se på vektorrommet $\mathbb{C}^3$. Vi ser lett at listen

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

bestående av de tre enhetsvektorene er en basis. Men vi kan også finne andre basiser. Enhver liste med tre lineært uavhengige vektorer blir en basis for $\mathbb{C}^3$ (du husker fra et tidligere teorem at tre vektorer i $\mathbb{C}^3$ er lineært uavhengige hvis og bare hvis de utspenner $\mathbb{C}^3$). Så for eksempel er listen

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2-i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

også en basis for $\mathbb{C}^3$. △

Vi ser at vi alltid kan bruke enhetsvektorene til å lage en basis for $\mathbb{C}^n$ eller $\mathbb{R}^n$. Denne basisen,

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right),$$

kalles *standardbasisen* for $\mathbb{C}^n$ eller $\mathbb{R}^n$.

Merk at én basis for $\mathbb{C}^n$ som et *reelt* vektorrom er gitt av lista

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ i \end{bmatrix} \right).$$

Det som gjør $\mathbb{C}^n$ og $\mathbb{R}^n$ lettere å jobbe med enn andre vektorrom er at vi har *koordinater*. Enhver vektor i $\mathbb{C}^n$ eller $\mathbb{R}^n$ er en kolonnevektor

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

der v_1 er vektorens første koordinat, v_2 er dens andre koordinat, og så videre. En av de viktigste egenskapene til en basis er at den lar oss innføre koordinater.

Teorem 7.14. *La V være et vektorrom med basis*

$$\mathscr{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n).$$

Da kan hver vektor $\mathbf{v}$ i V skrives som en lineærkombinasjon

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n$$

av basisvektorene i $\mathscr{B}$, på en entydig måte.

Bevis. Det at hver vektor $\mathbf{v}$ kan skrives som en lineærkombinasjon av basisvektorene følger av at basisvektorene utspenner V. Det at denne lineærkombinasjonen er entydig følger av at basisvektorene er lineært uavhengige. □

Definisjon. Tallene $c_1, c_2, \ldots, c_n$ i teorem 7.14 kalles *koordinatene* til vektoren $\mathbf{v}$ *med hensyn på* basisen $\mathscr{B}$. Vi definerer notasjonen $[\,\mathbf{v}\,]_{\mathscr{B}}$ for vektoren i $\mathbb{C}^n$ som består av koordinatene til $\mathbf{v}$:

$$[\,\mathbf{v}\,]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$ △

Eksempel 7.15. I eksempel 7.5 så vi at funksjonene sin og cos er lineært uavhengige vektorer i vektorrommet $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ av kontinuerlige funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$. Det betyr at hvis vi ser på underrommet

$$U = \mathrm{Sp}\{\sin, \cos\}$$

av $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ utspent av disse to funksjonene, så er

$$\mathscr{B} = (\sin, \cos)$$

en basis for U. Denne basisen vil spille en viktig rolle når du lærer om Fourieranalyse senere.

La oss nå se på en vektor i U, for eksempel funksjonen f gitt ved

$$f(x) = 4\sin x - 7\cos x.$$

Koordinatene til f med hensyn på basisen $\mathscr{B}$ er 4 og -7, så koordinatvektoren til f blir vektoren

$$[\,f\,]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}$$

i $\mathbb{R}^2$. På denne måten kan vi gå fra å snakke om funksjoner i U til å snakke om vektorer i $\mathbb{R}^2$.

La oss nå se på funksjonen $2f$, som er lineærkombinasjonen

$$2f = 8\sin - 14\cos$$

av vektorene sin og cos. Det betyr at den har koordinatvektor

$$[\,2f\,]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 8 \\ -14 \end{bmatrix}$$

med hensyn på basisen $\mathscr{B}$. Vi ser at å gange vektoren med 2 tilsvarer å gange koordinatvektoren med 2. △

Teorem 7.16. *La V være et vektorrom med basis $\mathscr{B}$. Koordinatene til en lineærkombinasjon av vektorer er den tilsvarende lineærkombinasjonen av koordinatene til hver vektor:*

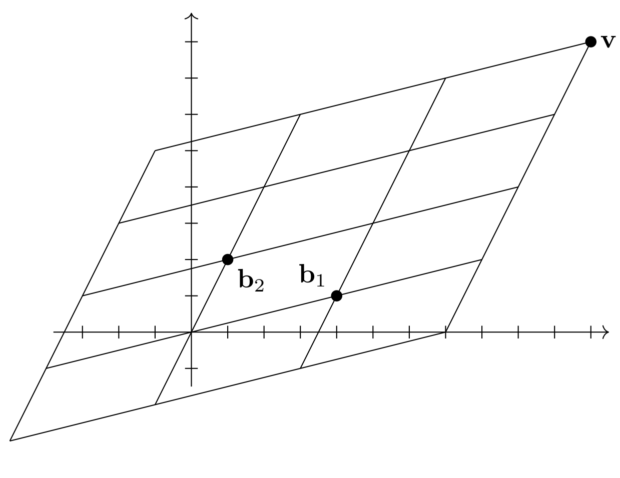
$$\begin{aligned} &[\,c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_t\mathbf{v}_t\,]_{\mathscr{B}} \\ &\qquad = c_1 \cdot [\,\mathbf{v}_1\,]_{\mathscr{B}} + c_2 \cdot [\,\mathbf{v}_2\,]_{\mathscr{B}} + \cdots + c_t \cdot [\,\mathbf{v}_t\,]_{\mathscr{B}} \end{aligned}$$

Hvis vi ser på koordinater med hensyn på standardbasisen i $\mathbb{R}^n$, så tilsvarer det å lage et vanlig koordinatsystem. Men hvis vi ser på koordinater med hensyn på en annen basis for $\mathbb{R}^n$, så tilsvarer det å lage et «skrått» koordinatsystem.

Eksempel 7.17. Vi ser på $\mathbb{R}^2$ med basisen

$$\mathscr{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

Det å bruke denne basisen for $\mathbb{R}^2$ tilsvarer å regne i et skrått koordinatsystem der $\mathbf{b}_1$ og $\mathbf{b}_2$ tar rollene som enhetsvektorer:



For eksempel har vektoren $\mathbf{v}$ på tegningen koordinater

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 11 \\ 8 \end{bmatrix}$$

med hensyn på standardbasisen, men koordinater

$$[\,\mathbf{v}\,]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

med hensyn på basisen $\mathscr{B}$. △

Bytte basisen. Nå kan vi stille et naturlig og viktig spørsmål:

> *Kan vi beregne hvordan koordinatene endrer seg når vi bytter basisen?*

Vi skal utsette svaret til neste kapittel når vi studerer lineære transformasjoner. Men vi burde ha spørsmålet i bakhodet.

Nå har vi sett noen eksempler på hva en basis kan brukes til. Videre vil vi vise at det alltid er mulig å finne en basis, forutsatt at vektorrommet vårt er endeligdimensjonalt.

Teorem 7.18. *La V være et endeligdimensjonalt vektorrom. Da kan enhver endelig mengde som utspenner V reduseres til en basis for V. Mer presist: Hvis G er en endelig mengde av vektorer slik at $\operatorname{Sp} G = V$, så finnes en delmengde $B \subseteq G$ slik at vektorene i B utgjør en basis for V.*

Bevis. Det eneste som kan hindre oss fra å bare bruke vektorene i G som en basis er at de kan være lineært avhengige. Så hvis vektorene i G er lineært uavhengige, kan vi bare sette $B = G$, og vi er ferdige.

Anta nå at vektorene i G er lineært avhengige. Da finnes en vektor $\mathbf{v}$ i G som er en lineærkombinasjon av de andre. Vi lager en ny mengde

$$G_1 = G - \{\mathbf{v}\}$$

der vi har fjernet denne vektoren. Siden $\mathbf{v}$ er en lineærkombinasjon av vektorene i G_1, får vi at G_1 utspenner det samme som G, altså hele vektorrommet V.

Nå kan vi fortsette på samme måte med å fjerne ett og ett element så lenge vektorene i mengden vår er lineært avhengige. Da får vi stadig nye delmengder

$$G \supset G_1 \supset G_2 \supset \cdots$$

som alle utspenner hele V. Siden G er en endelig mengde, kan vi ikke fortsette slik som dette i det uendelige, og på et eller annet punkt må vi derfor få en mengde av lineært uavhengige vektorer. Disse vektorene utgjør en basis for V. □

Siden et endeligdimensjonalt vektorrom per definisjon er utspent av en endelig mengde, viser dette teoremet at det alltid finnes en basis for et slikt rom. Vi skriver dette enda tydeligere i et nytt teorem.

Teorem 7.19. *Ethvert endeligdimensjonalt vektorrom har en basis.*

Vi så over at enhver endelig mengde som utspenner et vektorrom kan reduseres til en basis. På samme måte kan enhver mengde som er lineært uavhengig utvides til en basis.

Teorem 7.20. *La V være et endeligdimensjonalt vektorrom. Enhver endelig mengde av vektorer i V som er lineært uavhengig kan utvides til en basis. Mer presist: Hvis L er en endelig mengde av vektorer som er lineært uavhengige, så finnes en basis for V som inneholder alle vektorene i L.*

Dimensjon

Nå som vi vet at alle endeligdimensjonale vektorrom har basis, kan vi bruke det til å definere dimensjonen til et vektorrom. Vi vil si at dimensjonen til et vektorrom er antall vektorer i basisen, men før vi kan si det, må vi forsikre oss om at forskjellige basiser for det samme rommet ikke kan ha forskjellig antall elementer.

Vi begynner med å generalisere et kjent resultat fra $\mathbb{R}^n$ til et vektorrom med basis. Vi husker fra et tidligere teorem at hvis vi har en liste med mer enn n vektorer i $\mathbb{R}^n$, så må vektorene i listen være lineært avhengige. Det tilsvarende utsagnet formulert med utgangspunkt i en basis sier at hvis vi har en liste med flere vektorer enn størrelsen på basisen, så må disse vektorene være lineært avhengige.

Teorem 7.21. *La V være et vektorrom med en basis $\mathscr{B}$ som består av n vektorer. La $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_m$ være m vektorer i V, der $m > n$. Da er disse vektorene lineært avhengige.*

Bevis. La

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= [\,\mathbf{v}_1\,]_{\mathscr{B}} \\ \mathbf{u}_2 &= [\,\mathbf{v}_2\,]_{\mathscr{B}} \\ &\vdots \\ \mathbf{u}_m &= [\,\mathbf{v}_m\,]_{\mathscr{B}} \end{aligned}$$

være koordinatvektorene til vektorene vi ser på, med hensyn på basisen $\mathscr{B}$. Da er $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, …, $\mathbf{u}_m$ en liste med m vektorer i $\mathbb{R}^n$, og siden $m > n$ vet vi da fra teorem 7.3 at de er lineært avhengige. Det vil si at det finnes skalarer c_1, c_2, …, c_m (som ikke alle er 0) slik at

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots c_m\mathbf{u}_m = \mathbf{0}.$$

Uttrykket på venstresiden her er det samme som

$$c_1[\,\mathbf{v}_1\,]_{\mathscr{B}} + c_2[\,\mathbf{v}_2\,]_{\mathscr{B}} + \cdots + c_m[\,\mathbf{v}_m\,]_{\mathscr{B}},$$

og ved teorem 7.16 er dette igjen det samme som

$$[\,c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots c_m\mathbf{v}_m\,]_{\mathscr{B}}.$$

Vi har altså at

$$[\,c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots c_m\mathbf{v}_m\,]_{\mathscr{B}} = \mathbf{0},$$

og dermed må vi ha

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots c_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0},$$

Dette betyr at vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_m$ er lineært avhengige. □

Ved hjelp av dette teoremet ser vi at alle basiser for samme vektorrom må ha like mange elementer.

Teorem 7.22. *La V være et endeligdimensjonalt vektorrom. Da har enhver basis for V samme størrelse.*

Bevis. Anta at vi har to basiser

$$\mathscr{B}_1 = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$$
$$\mathscr{B}_2 = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m)$$

for V. Hvis $m > n$, så sier teorem 7.21 at vektorene

$$\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \ldots,\ \mathbf{v}_m$$

er lineært avhengige, men det kan de ikke være siden $\mathscr{B}_2$ er en basis. Det er altså ikke mulig at $m > n$. På samme måte viser vi at det ikke er mulig at $n > m$. Da er det bare én mulighet igjen, nemlig at $m = n$, altså at basisene har samme størrelse. □

Nå som vi vet at alle basiser for samme vektorrom har samme størrelse, kan vi trygt definere dimensjonen til et vektorrom som størrelsen til en hvilken som helst basis for vektorrommet.

Definisjon. La V være et endeligdimensjonalt vektorrom. Vi definerer *dimensjonen* til V som antall vektorer i en basis for V. Vi bruker notasjonen $\dim V$ for dimensjonen til V. Hvis $\mathscr{B}$ er en basis for V, har vi altså

$$\dim V = |\mathscr{B}|.$$ △

Det er en enkel og grei sammenheng mellom dimensjon og underrom: Et underrom kan aldri ha større dimensjon enn vektorrommet det er underrom av. Vi formulerer dette som et teorem.

Teorem 7.23. *La V være et vektorrom med et underrom U. Hvis V er endeligdimensjonalt, så er U også endeligdimensjonalt, og*

$$\dim U \leq \dim V.$$

Vektorrom tilknyttet en matrise

Hittil i dette kapitlet har vi vært veldig generelle og abstrakte, og ting har kanskje blitt litt høytflyvende. Vi avslutter kapitlet med noe litt mer håndfast, der vi ikke trenger å tenke på helt generelle vektorrom, men bare på underrom av $\mathbb{R}^n$ eller $\mathbb{C}^n$.

Hvis A er en kompleks $m \times n$-matrise, så er det visse underrom av $\mathbb{C}^n$ og av $\mathbb{C}^m$ som er nært knyttet til A, og det er noen interessante sammenhenger mellom disse rommene.

Nullrommet. Vi definerer *nullrommet* til en kompleks $m \times n$-matrise A som løsningsmengden til ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, altså delmengden

$$\operatorname{Null} A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

av $\mathbb{C}^n$. I utgangspunktet er dette bare en mengde av vektorer i $\mathbb{C}^n$, men vi kan raskt finne ut at det faktisk er et underrom ved å sjekke at det oppfyller de tre kriteriene i teorem 7.9:

1. Vi ser at nullvektoren er i $\operatorname{Null} A$, siden den er en løsning av ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. Hvis $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er vektorer i $\operatorname{Null} A$, så har vi at $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$ og $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Da får vi
$$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0},$$
som betyr at summen $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ også er i $\operatorname{Null} A$.
3. Hvis $\mathbf{u}$ er i $\operatorname{Null} A$ og c er en skalar, så får vi
$$A \cdot (c \cdot \mathbf{u}) = c \cdot (A\mathbf{u}) = c \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0},$$
slik at $c \cdot \mathbf{u}$ også er i $\operatorname{Null} A$.

Kolonnerommet. Vi definerer *kolonnerommet* til en kompleks $m \times n$-matrise

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$$

som underrommet av $\mathbb{C}^m$ utspent av kolonnene i A:

$$\operatorname{Col} A = \operatorname{Sp}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$$

Kolonnerommet til A består altså av alle lineærkombinasjoner av kolonnene i A. Siden et produkt $A\mathbf{v}$ av matrisen A og en vektor $\mathbf{v}$ i $\mathbb{C}^n$ er definert til å være nettopp en lineærkombinasjon av kolonnene i A, kan vi også beskrive kolonnerommet som alle vektorer som er på formen $A\mathbf{v}$:

$$\operatorname{Col} A = \{A\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\}$$

Radrommet. Vi definerer *radrommet* til en kompleks $m \times n$-matrise

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^\top \\ \mathbf{r}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m^\top \end{bmatrix}$$

som underrommet av $\mathbb{R}^n$ utspent av radene i A:

$$\operatorname{Row} A = \operatorname{Sp}\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m\}$$

Radrommet til A består altså av alle lineærkombinasjoner av radene i A (der vi ser på radene som kolonnevektorer). Dette er det samme som kolonnerommet til den transponerte matrisen:

$$\operatorname{Row} A = \operatorname{Col} A^\top$$

Merk. Hvis A er en *reell* $m \times n$-matrise, så bruker vi de samme definisjonene for nullrommet, kolonnerommet og radrommet og får dermed tilsvarende reelle underrom av henholdsvis $\mathbb{R}^n$ og $\mathbb{R}^m$. △

Vi tar nå et ganske langt eksempel der vi ser på hva vi kan si om nullrommet, kolonnerommet og radrommet til en matrise.

Eksempel 7.24. La A være følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & 15 & 3 \end{bmatrix}$$

Vi vil prøve å beskrive nullrommet, kolonnerommet og radrommet til A.

For å finne nullrommet, må vi løse ligningen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Det gjør vi ved å gausseliminere matrisen A. Da får vi (her er mellomregningen utelatt):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & 15 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi får tre frie variabler, og den generelle løsningen blir:

$$\mathbf{x} = r \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dette betyr at de tre vektorene

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

utspenner nullrommet til A. De er dessuten lineært uavhengige: Legg merke til at i posisjon to, fire og fem – som tilsvarer de tre frie variablene – har én av vektorene tallet 1 og de andre to tallet 0. Dermed ser vi lett at ingen av dem kan være en lineærkombinasjon av de to andre, slik at de må være lineært uavhengige. Dette betyr at

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

er en basis for nullrommet $\operatorname{Null} A$.

Når det gjelder kolonnerommet og radrommet, har vi direkte fra definisjonene at dissee rommene kan beskrives slik:

$$\operatorname{Col} A = \operatorname{Sp} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\operatorname{Row} A = \operatorname{Sp} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \\ 15 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

Men her har vi bare en utspennende mengde for hvert av rommene. Den beste måten å beskrive et vektorrom på er å gi en basis. Det viser seg at vi kan finne basiser for kolonnerommet og radrommet til A ved å se på hva som skjer når vi gausseliminerer A.

La oss ta kolonnerommet først. Se på trappeformmatrisen vi endte opp med. Den har pivotelementer i første og tredje kolonne. Hvis vi stokker om på kolonnene i A slik at første og tredje kolonne kommer først, og gjør det samme med trappeformmatrisen, så blir disse matrisene også radekvivalente (fordi dette tilsvarer at vi bytter om kolonnene på samme måte i hver matrise vi får underveis i gausselimineringen):

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & 15 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La oss skrive $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$ for kolonnevektorene i matrisen A. Trappeformmatrisen viser oss hvordan vi kan skrive kolonnene som *ikke* er pivotkolonner, dvs $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4$ og $\mathbf{a}_5$, som lineærkombinasjoner av pivotkolonnene, dvs $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_3$:

$$\mathbf{a}_2 = 2 \cdot \mathbf{a}_1, \ \mathbf{a}_4 = (-1) \cdot \mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_3, \ \mathbf{a}_5 = (-1) \cdot \mathbf{a}_1 + 1 \cdot \mathbf{a}_3.$$

Især viser dette at kolonnene som *ikke* er pivotkolonner, dvs $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4$ og $\mathbf{a}_5$, ligger i rommet som er utspent av pivotkolonnene, dvs $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_3$:

$$\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5 \in \operatorname{Sp}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}.$$

Rommet som er utspent av alle kolonnene i A, dvs kolonnerommet, er derfor lik rommet som er bare utspent av kolonnene $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_3$. Dessuten viser oss trappeformmatrisen at $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_3$ er lineært uavhengige.

Dette betyr at $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3)$, med andre ord,

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} \right)$$

er en basis for kolonnerommet $\operatorname{Col} A$.

Merk. Eksemplet viser oss faktisk en oppskrift for å finne en basis for kolonnerommet:

1. Bruk gausseliminasjonen for å få trappeformmatrisen som er radekvivalent til A.
2. Se på trappeformmatrisen for å finne ut hvilke av kolonnene i A er pivotkolonner.
3. Pivotkolonnene danner en basis for $\operatorname{Col} A$.

Husk i det siste skrittet at vi må bruke de opprinnelige kolonnene i A for å skrive ned basisen. Vi trenger trappeformmatrisen bare for å finne pivotkolonnene. Grunnen til at vi må være forsiktige her er at gausseliminasjonen endrer vanligvis kolonnerommet. △

Det er litt enklere å se hvordan gausseliminasjonen gir oss en basis for radrommet. Vi kan se at hvis to matriser er radekvivalente, så har de samme radrom. Når vi utfører en radoperasjon er det nemlig slik at alle rader i den nye matrisen er lineærkombinasjoner av radene i den gamle matrisen (dette kan du ganske enkelt sjekke selv). Dessuten kan vi alltid finne en «omvendt» radoperasjon som tar oss tilbake til den gamle matrisen, slik at alle rader i den gamle matrisen er lineærkombinasjoner av radene i den nye. Altså har matrisene samme radrom.

Dette betyr at for å beskrive radrommet til A kan vi like godt se på trappeformmatrisen vi fikk ved å gausseliminere A. Der ser vi lett at alle radene som ikke er nullrader må være lineært uavhengige. Vi får dermed at

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

er en basis for radrommet $\operatorname{Row} A$. △

Metodene vi brukte i eksempelet for å finne basiser for nullrommet, kolonnerommet og radrommet fungerer generelt for en hvilken som helst matrise. Vi ser dermed at vi kan beskrive dimensjonene til disse tre rommene ved hjelp av antall frie variabler og antall pivotelementer i trappeformmatrisen.

Teorem 7.25. *La A være en $m \times n$-matrise, og la E være trappeformmatrisen vi får når vi gausseliminerer A. Da har vi:*

(a) Dimensjonen til nullrommet til A er lik antall frie variabler vi får når vi løser ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, altså antall kolonner uten pivotelement i E.

(b) Dimensjonen til kolonnerommet til A er lik antall kolonner med pivotelementer i E.

(c) Dimensjonen til radrommet til A er lik antall rader som ikke er null i E.

Siden det er ett pivotelement i hver rad som ikke er null, får vi ved å kombinere del (b) og (c) i dette teoremet at kolonnerommet og radrommet har samme dimensjon. Vi skriver opp dette også som et teorem.

Teorem 7.26. *La A være en $m \times n$-matrise. Da har kolonnerommet og radrommet til A samme dimensjon:*

$$\dim \operatorname{Col} A = \dim \operatorname{Row} A$$

Dette ene tallet, som både er dimensjonen til kolonnerommet og dimensjonen til radrommet, kalles *rangen* til matrisen. Vi skriver:

$$\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Col} A = \dim \operatorname{Row} A$$

Siden enhver kolonne i trappeformmatrisen enten inneholder et pivotelement eller gir opphav til en fri variabel for ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, får vi følgende resultat ved å kombinere del (a) og (b) fra teorem 7.25.

Teorem 7.27. *La A være en $m \times n$-matrise. Da er*

$$\dim \operatorname{Null} A + \operatorname{rank} A = n.$$