Kapittel 10

Diagonalisering

I dette kapitlet skal vi anvende vår kunnskap om egenverdier og egenvektorer til å analysere matriser og deres tilsvarende lineærtransformasjoner.

Eksempel 10.1. Vi begynner med et eksempel og ser på diagonalmatrisen

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Det er lett å multiplisere D med vektorer i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{C}^2$. Men det er også enkelt å multiplisere D med seg selv. For eksempel får vi D^5 ved

$$D^5 = D{\cdot}D{\cdot}D{\cdot}D{\cdot}D = \begin{bmatrix} 3^5 & 0 \\ 0 & (-5)^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 243 & 0 \\ 0 & -3125 \end{bmatrix}.$$

Hvis vi prøver det samme med A, dvs beregne A^5 for

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

blir det mye mer tidskrevende.

Fordi det er mye lettere å jobbe med en diagonalmatrise, kan vi stille spørsmålet om det finnes en diagonalmatrise D og en inverterbar matrise P slik at

$$A = PDP^{-1}.$$

Da ville oppgaven å beregne A^5 blitt mye enklere:

$$\begin{aligned} A^5 &= (PDP^{-1})^5 \\ &= PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} \cdots PDP^{-1} \\ &= PD^5P^{-1}, \end{aligned}$$

fordi $P^{-1} \cdot P = I_2$, og D^5 er lett å beregne.

For å finne slike matriser D og P husker vi noen ting om A fra forrige kapittel, nemlig at A har egenverdier $\lambda_1 = 3$ og $\lambda_2 = -5$ med henholdsvis $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ som egenvektorer. Det betyr at vi har

$$A\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{v}_1 \text{ og } A\mathbf{v}_2 = (-5)\mathbf{v}_2.$$

En annen måte å skrive disse to ligningene er å skrive egenverdiene på diagonalen i en matrise D og så skrive egenvektorene som kolonnene i en matrise P:

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \text{ og } P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix},$$

slik at

$$AP = PD.$$

Nå observerer vi at P er inverterbar med invers

$$P^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Altså kan vi gange begge sidene av $AP = PD$ med P^{-1} og får

$$A = PDP^{-1}.$$

Nå kan vi faktisk beregne A^k for alle k med formelen

$$A^k = PD^kP^{-1}. \qquad \triangle$$

Det vi har gjort i eksemplet er å erstatte en matrise A med en diagonalmatrise, med andre ord har vi diagonalisert A.

Definisjon. Vi sier at en $n \times n$-matrise A er *diagonaliserbar* hvis det finnes en diagonalmatrise D og en inverterbar matrise P slik at

$$A = PDP^{-1}. \qquad \triangle$$

Ikke alle matriser er diagonaliserbare. Derfor trenger vi en metode for å sjekke om vi kan diagonalisere A. Det gir oss følgende resultat:

Teorem 10.2. *En $n \times n$-matrise A er diagonaliserbar hvis og bare hvis A har n lineært uavhengige egenvektorer.*

Bevis. Først antar vi at A har n lineært uavhengige egenvektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ og tilhørende egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. For hver egenvektor gjelder

$$A\mathbf{v}_k = \lambda_k \mathbf{v}_k.$$

Som i eksemplet kan vi organisere disse n ligningene i en matriseligning

$$AP = PD,$$

der

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

og

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}.$$

Siden $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_n$ er lineært uavhengige, er $n \times n$-matrisen P inverterbar. Det betyr det finnes en invers P^{-1} og vi får

$$A = PDP^{-1}.$$

Med andre ord A er diagonaliserbar.

Nå antar vi at A er diagonaliserbar med $A = PDP^{-1}$ der D er en diagonalmatrise og P er en inverterbar matrise. La $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots \mathbf{v}_n$ være kolonnene i P og $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ være tallene som står på diagonalen i D. Ligningen $A = PDP^{-1}$ gir oss en likhet av matriser

$$\begin{bmatrix} A\mathbf{v}_1 & A\mathbf{v}_2 & \cdots & A\mathbf{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{v}_1 & \lambda_2\mathbf{v}_2 & \cdots & \lambda_n\mathbf{v}_n \end{bmatrix}.$$

Det viser

$$A\mathbf{v}_k = \lambda_k \mathbf{v}_k \text{ for alle } k.$$

Fordi P er inverterbar, må vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots \mathbf{v}_n$ være lineært uavhengige. Især er alle forskjellige fra nullvektoren. Det viser at $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots \mathbf{v}_n$ er lineært uavhengige egenvektorer for A. □

Vi fant i forrige kapittel at egenvektorer som hører til forskjellige egenverdier er lineært uavhengige. Sammen med teorem 10.2 gir det:

Teorem 10.3. *Hvis en $n \times n$-matrise A har n forskjellige egenverdier, så er A diagonaliserbar.*

Hvis noen av egenverdiene for A har algebraisk multiplisitet større enn 1, er det fortsatt mulig at A er diagonaliserbar. Det vi må undersøke er om det er nok lineært uavhengige egenverdier likevel.

Teorem 10.4. *En $n \times n$-matrise A er diagonaliserbar hvis og bare hvis A har n egenverdier og dimensjonen til egenrommet til hver egenverdi λ er lik den algebraiske multiplisiteten til λ.*

Merk. La A være en reell $n \times n$-matrise. Det er mulig at A er diagonaliserbar som en kompleks matrise, selv om den ikke er diagonaliserbar som en reell matrise. Om A har kun komplekse egenverdier, kan vi ikke finne en passende *reell* diagonalmatrise. Det er også mulig at egenverdiene er reelle, mens de tilsvarende n lineært uavhengige egenvektorene ligger i $\mathbb{C}^n$ og ikke i $\mathbb{R}^n$. Da kan vi ikke finne en passende inverterbar *reell* matrise P, selv om P eksisterer som en *kompleks* matrise. △

Vi kan reformulere det ved hjelp av basiser.

Teorem 10.5. *En kompleks $n \times n$-matrise A er diagonaliserbar hvis og bare hvis det finnes en basis for $\mathbb{C}^n$ som består kun av egenvektorer for A.*

En reell $n \times n$-matrise A er diagonaliserbar som en reell matrise hvis og bare hvis det finnes en basis for $\mathbb{R}^n$ som består kun av egenvektorer for A.

Dette resultatet motiverer følgende definisjon:

Definisjon. En lineærtransformasjon $T\colon V \to V$ kalles *diagonaliserbar* hvis det finnes en basis for V som består kun av egenvektorer for T. △

Da kan vi konkludere fra forrige teoremer og kapitler følgende resultat:

Teorem 10.6. *La $T\colon V \to V$ være en lineærtransformasjon. Vi antar at T er diagonaliserbar og $\mathscr{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ er en basis som består av egenvektorer. Da er matrisen som beskriver T med hensyn på basisen $\mathscr{B}$ en diagonalmatrise D med egenverdiene $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ for T på diagonalen.*

Vi kan tenke på teoremet på følgende måte. Hvis T er diagonaliserbar, la $\mathscr{B}$ være en basis som består av egenvektorer for T. Vi husker fra forrige kapittel at å velge en basis for V gir oss en isomorfi $\mathbb{C}^n \xrightarrow{\cong} V$ ved å sende den $k$te basisvektoren e_k i standardbasisen $\mathscr{E}$ for $\mathbb{C}^n$ til den $k$te basisvektoren i $\mathscr{B}$.

Så sier teoremet at det finnes en diagonalmatrise D slik at det er det samme i det følgende diagrammet om vi går fra det nedrevenstre hjørnet først opp og så langs T til høyre eller om vi går først til høyre ved å gange med D og så gå opp (en matematiker sier at diagrammet *kommuterer*):

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] & V \\ \mathbb{C}^n \arrow[u, "\text{sende } \mathscr{E} \text{ til } \mathscr{B}"] \arrow[r, "D\cdot"] & \mathbb{C}^n. \arrow[u, "\text{sende } \mathscr{E} \text{ til } \mathscr{B}"'] \end{tikzcd}$$

Det holder å sjekke det for basisvektorene: $\mathbf{e}_k \in \mathbb{C}^n$ sendes til $\mathbf{v}_k$ som sendes til $\lambda_k \mathbf{v}_k$ av T eller $\mathbf{e}_k$ sendes først til $\lambda_k \mathbf{e}_k$ av D og så til $\lambda_k \mathbf{v}_k$.

For $V = \mathbb{C}^n$ tilsvarer diagrammet likheten $A = PDP^{-1}$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\text{koordinatskifte}"', "P^{-1}"] & \mathbb{C}^n \\ \mathbb{C}^n \arrow[r, "D"] & \mathbb{C}^n. \arrow[u, "P", "\text{koordinatskifte}"'] \end{tikzcd}$$

Eksempler

Vi skal nå se på en rekke eksempler.

Eksempel 10.7. Vi har sett på matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 6 \\ 12 & 4 & -6 \\ -20 & 0 & 14 \end{bmatrix},$$

og vet at egenverdiene for A er 2 og 4 (med algebraisk multiplisitet 2). Egenrommet til egenverdi 2 er

$$\operatorname{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}.$$

Egenrommet til egenverdi 4 er

$$\operatorname{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Vi ser at vi har tre lineært uavhengige egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Det betyr at A er diagonaliserbar med diagonalmatrisen

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

og inverterbar matrise

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \qquad \triangle$$

Eksempel 10.8. Matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

har egenverdier

$$\lambda = \pm i$$

med egenrom $\mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ til egenverdi i, og egenrom $\mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}\right\}$ til egenverdi $-i$.

Det betyr at A er diagonaliserbar som en *kompleks* matrise med diagonalmatrise

$$D = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

og inverterbar matrise

$$P = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}.$$

Men vi kan ikke diagonalisere A som en *reell* matrise. $\triangle$

Eksempel 10.9. Vi ser på matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Egenverdien til A er 1 med algebraisk multiplisitet 2 fordi

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = (1-\lambda)^2.$$

Egenrommet til 1 er nullrommet til matrisen

$$A - I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Det er underrommet utspent av vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Især er egenrommet endimensjonalt. Vi kan altså ikke finne to lineært uavhengige egenvektorer for A. Dette viser at A *ikke* er diagonaliserbar, hverken som reell eller kompleks matrise. $\triangle$

Eksempel 10.10. Det samme argumentet viser at matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ikke er diagonaliserbar, hverken som reell eller kompleks matrise. $\triangle$

Oppgave: Vi ser på matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

For hvilke reelle tall a og b er A diagonaliserbar?

Mer om komplekse egenverdier

Når en reell $n \times n$-matrise A har komplekse egenverdier er det på første øyekast ikke lenger så enkelt å se geometrisk hva virkningen av A på vektorer i $\mathbb{R}^n$ er. Vi skal nå se at det ligger ganske mye geometri i bakgunn likevel, i hvert fall for 2×2-matriser.

La C være matrisen

$$C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

med reelle tall a og $b \neq 0$. Vi kan beregne egenverdiene for C eller vi kan observere at

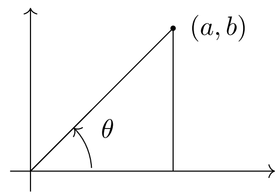
$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - bi \\ b + ai \end{bmatrix} = (a - bi) \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}.$$

Altså er $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ en egenvektor til C med egenverdi $\lambda = a - bi$. Fordi $b \neq 0$, vet vi at $\bar{\lambda} = a + bi$ er den andre egenverdien til C med egenvektor $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$.

Hvis vi skriver $r = |\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2}$ for lengden av vektoren $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^2$, så kan vi skrive

$$C = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

der θ er vinkelen mellom den positive x-aksen og linjen fra origoen til punktet med koordinater (a, b).



Å gange en vektor $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^2$ med matrisen $\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$ tilsvarer at vi ganger vektoren med tallet r, med andre vi strekker eller krymper $\mathbf{v}$ med faktoren r. Å gange en vektor $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^2$ med matrisen $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ tilsvarer å rotere $\mathbf{v}$ om vinkelen θ.

Altså har vi vist at å gange en vektor $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^2$ med matrisen C tilsvarer å strekke og rotere $\mathbf{v}$.

Observasjonen at å gange med matrisen C tilsvarer en rotasjonion og en reskalering gjelder faktisk også for andre matriser med komplekse egenverdier.

Teorem 10.11. *La A være en reell 2×2-matrise med kompleks egenverdi $\lambda = a - bi$, med $b \neq 0$, og la $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^2$ være en egenvektor som hører til λ. Så kan vi faktorisere A*

$$A = PCP^{-1} \text{ med } P = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\,\mathbf{v} & \mathrm{Im}\,\mathbf{v} \end{bmatrix} \text{ og } C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Teoremet sier at for å forstå virkningen av A på en vektor $\mathbf{x}$, kan vi skifte koordinater ved P^{-1} for å få $\mathbf{u} = P^{-1}\mathbf{x}$, rotere og strekke vektoren $\mathbf{u}$ ved C og skifte koordinatene tilbake:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{x} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P^{-1}", "\text{koordinatskifte}"'] & A\mathbf{x} \\
\mathbf{u} \arrow[r, "C", "\text{rotere/stretche}"'] & C\mathbf{u}. \arrow[u, "P"', "\text{koordinatskifte}"]
\end{tikzcd}$$

Eksempel 10.12. La A være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vi finner egenverdiene til A:

$$\begin{aligned} &\det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0 \\ \iff &(1-\lambda)(3-\lambda) + 2 = 0 \\ \iff &\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \\ \iff &(\lambda-2)^2 + 1 = 0 \\ \iff &\lambda = 2+i \text{ eller } \lambda = 2-i. \end{aligned}$$

Vi finner egenvektorer som hører til egenverdien $\lambda = 2 - i$. Da må vi bestemme nullrommet til matrisen $A - \lambda I_2$:

$$A - (2-i)I_2 = \begin{bmatrix} -1-i & -2 \\ 1 & 1+i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Det viser at $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1+i \\ -1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor for A som hører til egenverdi $\lambda = 2 - i$.

Som i teoremet får vi $A = PCP^{-1}$ med matrisene

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

og

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

△

Symmetriske matriser

Definisjon. En reell matrise kalles *symmetrisk* dersom $A = A^T$. △

Eksempel 10.13. Matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ -5 & 2 & -13 \\ 7 & -13 & 3 \end{bmatrix}$$

er symmetrisk. △

En reell 2×2-matrise A er symmetrisk hvis den har formen

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Vi sjekker om denne matrisen er diagonaliserbar. Vi beregner egenverdiene:

$$\begin{aligned} &\det\left(\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0 \\ \iff &(a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 = 0 \\ \iff &\lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 = 0 \\ \iff &\lambda = \frac{\pm\sqrt{(a-c)^2 + 4b^2} + a + c}{2}. \end{aligned}$$

Fordi $(a-c)^2 + 4b^2$ er et positivt reelt tall, ser vi at A har to *reelle* egenverdier.

Hvis $(a-c)^2 + 4b^2 \neq 0$, så er egenverdiene forskjellige. Det betyr at 2×2-matrisen A har to *forskjellige* egenverdier og er dermed diagonaliserbar. Hvis $(a-c)^2 + 4b^2 = 0$, så må vi ha $a - c = 0$ og $b = 0$, altså er $A = a \cdot I_2$ en diagonalmatrise med egenrom hele $\mathbb{R}^2$.

Vi ser altså at en symmetrisk 2×2-matrise er alltid diagonaliserbar. Faktisk holder det vi nettopp fant ut, også i alle dimensjoner:

Teorem 10.14. *La A være en* symmetrisk $n \times n$-*matrise. Da har A n* reelle *egenverdier (talt med multiplisitet) og A er diagonaliserbar (som en reell matrise).*

Merk. Dette teoremet er fantastisk fordi for en vanlig $n \times n$-matrise er det nesten umulig å se med en gang om den er diagonaliserbar. Men for symmetriske matriser er det lett å se. △

> Oppgave: Sjekk om matrisen
>
> $$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$
>
> er diagonaliserbar. Hvis den er diagonaliserbar, finn den tilsvarende diagonalmatrisen D og inverterbare matrise P slik at $A = PDP^{-1}$.

Eksempel 10.15. Vi ser på matrisen

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Vi beregner egenverdiene:

$$\begin{aligned} &\det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 6-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 6-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0 \\ \iff &(1-\lambda)((6-\lambda)^2 - 4) \\ &\quad - 2(2(6-\lambda) - 4) + 2(4 - 2(6-\lambda)) = 0 \\ \iff &\lambda^3 - 13\lambda^2 + 36\lambda = 0 \\ \iff &\lambda(\lambda-4)(\lambda-9) = 0. \end{aligned}$$

Det viser at egenverdiene for B er 0, 4 og 9. Egenvektorerer er henholdsvis

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Altså får vi $B = PDP^{-1}$ med diagonalmatrise

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

og inverterbar matrise

$$P = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

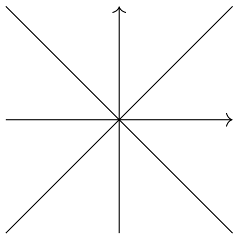
△

Merk. Det forrige eksemplet minner oss om at en matrise kan være diagonaliserbar uten å være inverterbar. △

En forsmak på ortogonalitet

Vi skal se nærmere på indreproduktet og ortogonalitet i neste kapittelet, men vi begynner med en liten forsmak allerede her.

Vi ser litt nærmere på eksemplene $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$, så observerer vi noe overraskende. Egenvektorene $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ for A utspenner underrom i $\mathbb{R}^2$ som er ortogonalt til hverandre:



Ortogonale egenrom for A

Vi husker at vi kan sjekke om to vektorer i $\mathbb{R}^2$ er ortogonale ved å sjekke at deres indreprodukt er null:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1^T \cdot \mathbf{u}_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Det samme fenomenet observerer vi for egenrommene for B. Egenvektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er ortogonale til hverandre:

$$\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = (-4) \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 0,$$

$$\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 - 1 + 1 = 0,$$

$$\mathbf{v}_2^T \cdot \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 - 2 + 2 = 0.$$

Faktisk er dette alltid riktig for symmetriske matriser:

Teorem 10.16. *La A være en* symmetriske $n \times n$-*matrise. Egenvektorene for A til to distinkte egenverdier er ortogonale.*

Bevis. La $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ være to egenvektorer som hører til egenverdier henholdsvis λ_1 og λ_2. Vi beregner

$$\begin{aligned} \lambda_1 \mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_2 &= (\lambda_1 \mathbf{v}_1)^T \cdot \mathbf{v}_2 = (A\mathbf{v}_1)^T \cdot \mathbf{v}_2 \\ &= \mathbf{v}_1^T \cdot A^T \cdot \mathbf{v}_2 \\ &\text{(nå bruker vi at A er symmetrisk: } A = A^T) \\ &= \mathbf{v}_1^T \cdot A \cdot \mathbf{v}_2 \\ &= \mathbf{v}_1^T \cdot (A \cdot \mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1^T \cdot (\lambda_2 \mathbf{v}_2) \\ &= \lambda_2 \mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_2. \end{aligned}$$

Vi vet altså at

$$0 = \lambda_1 \mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_2 - \lambda_2 \mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_2 = (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_2.$$

Nå bruker vi at λ_1 og λ_2 er forskjellige, og får

$$\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_2 = 0.$$

□

Definisjon. En $n \times n$-matrise er *ortogonalt diagonaliserbar* dersom den har n ortogonale egenvektorer.

For en symmetrisk $n \times n$-matrise har vi vist at egenvektorene til forskjellige egenverdier er ortogonale til hverandre. Neste uke lærer vi at, gitt en basis for et underrom i $\mathbb{R}^n$, vi alltid kan bytte til en basis der alle basisvektorer er ortogonale til hverandre. Dette viser:

Teorem 10.17. *En reell $n \times n$-matrise er ortogonalt diagonaliserbar hvis og bare hvis den er symmetrisk.*

For $n \times n$-matriser med *komplekse* elementer trengs det en liten tilpasning for å få lignende resultater.

La A være en $n \times n$-matrise med $a_{ij} \in \mathbb{C}$ som element i rad i og kolonne j. Da skriver vi A^* for matrisen

$$A^* = \overline{A^T}$$

dvs vi transponerer A og så komplekskpnjugerer vi resultatet. Med andre ord, elementet i A^* i rad i og kolonne j er $\overline{a_{ji}}$.

Definisjon. En $n \times n$-matrise A kalles *hermitsk* hvis

$$A = A^*.$$

△

Merk. I en hermitsk matrise A må elemente på diagonalen være reelle tall fordi de oppfyller $a_{ii} = \overline{a_{ii}}$.

Dessuten er en reell matrise hermitsk hvis og bare hvis den er symmetrisk. △

Vi skal utvikle litt av teorien i det komplekse tilfellet i øvingene. Her nøyer vi oss med å nevne hovedresultatet:

Teorem 10.18. *En hermitsk $n \times n$-matrise har n reelle egenverdier (talt med multiplisitet) og er ortogonalt diagonaliserbar.*