Kapittel 12

Anvendelser

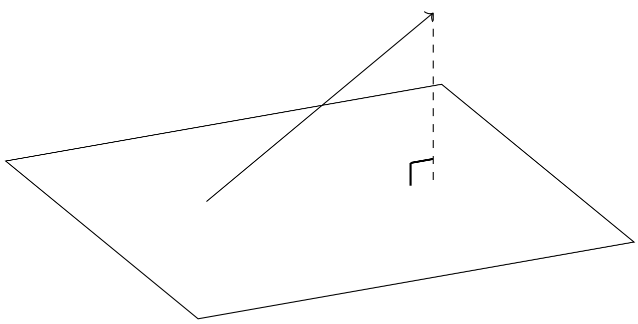
I dette kapitlet skal vi se på forskjellige anvendelser av teknikke vi har utviklet i løpet av de siste ukene. Avsnittene og eksemplene vi skal se på er derfor forholdsvis uavhengige.

Minste kvadraters metode

Dette er en teknikk for å finne tilnærmede løsninger til systemer med flere likninger enn ukjente. La oss si at A er en $m \times n$-matrise, $\mathbf{x}$ og $\mathbf{b}$ er kolonnevektorer i $\mathbb{C}^n$, og at vi ønsker å betrakte systemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

for $m > n$. Dette systemet vil ikke ha noen løsning med mindre $\mathbf{b}$ tilfeldigvis ligger i kolonnerommet til A. Så vi ønsker istedet å finne den $\hat{\mathbf{x}}$ som minimerer avstanden fra $A\mathbf{x}$ til $\mathbf{b}$. Hvis vi krever at vektoren $A\mathbf{x} - \mathbf{b}$ står ortogonalt på kolonnerommet til A, oppnår vi dette.



$A\hat{\mathbf{x}}$ er punktet i kolonnerommet med minst avstand til $\mathbf{b}$

Nullrommet til A^* er det ortogonale komplementet til kolonnerommet, altså må vi ha

$$A^*(A\mathbf{x} - \mathbf{b}) = \mathbf{0}$$

eller

$$A^*A\mathbf{x} = A^*\mathbf{b}.$$

Dette er et $n \times n$-system som kalles *normalligningene*. Løsningen av systemet gir den $\mathbf{x}$-en som minimerer avstanden fra $A\mathbf{x}$ til $\mathbf{b}$.

Vi skriver $\hat{\mathbf{x}}$ for denne vektoren. Punktet $A\hat{\mathbf{x}}$ er dermed punktet i kolonnerommet til A som ligger nærmest til vektoren $\mathbf{b}$.

Definisjon. Vi kaller $\hat{\mathbf{x}}$ den *minste kvadraters løsning* for $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. △

Vi oppsummerer diskusjonen vår i et teorem:

Teorem 12.1. *La A være en $m \times n$-matrise og $\mathbf{b}$ en kolonnevektor i $\mathbb{C}^n$. Mengden av minste kvadraters løsninger for systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er lik løsningsmengden for systemet*

$$A^*(A\mathbf{x} - \mathbf{b}) = \mathbf{0}.$$

Hvis $n \times n$-matrisen A^*A er inverterbar, så finnes det en entydig *minste kvadraters løsning $\hat{\mathbf{x}}$ for systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ for hver $\mathbf{b}$.*

Merk. Hvis A er en *reell* $m \times n$-matrise og $\mathbf{b}$ er en kolonnevektor i $\mathbb{R}^n$, så kan vi spørre om minste kvadraters løsninger for systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^n$. Denne mengden er da lik løsningsmengden for systemet

$$A^T(A\mathbf{x} - \mathbf{b}) = \mathbf{0}.$$

Vi legger også merke til at A^TA er alltid en symmetrisk matrise fordi

$$(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA.$$

△

Merk. Grunnen til at det kalles minste kvadraters metode er at avstanden $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$ mellom to punkter $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ i $\mathbb{R}^n$ måles ved å ta kvadratroten til summen av kvadratene, det vil si

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 = (v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2 + \cdots + (v_n - w_n)^2$$

der v_i og w_i er de $i$te koordinatene til henholdsvis $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$. Å minimere avstanden fra $\mathbf{b}$ til vektorene $A\mathbf{x}$ betyr derfor at vi minimerer en sum av kvadrater. △

Eksempel 12.2. Vi vil bruke minste kvadraters metoden for å finne vektoren som ligger nærmest til en løsning for $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Fordi A er en reell matrise, er $A^* = A^T$. Vi ganger matrisen A med sin transponerte på venstre siden

$$A^TA = \begin{bmatrix} -6 & -2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Vi må også beregne $A^T\mathbf{b}$:

$$A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -6 & -2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Nå løser vi systemet $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 90 & 0 & 45 \\ 0 & 4 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Det viser at $\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2 \end{bmatrix}$ er minste kvadratersløsning til systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Det betyr at punktet

$$A\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2\frac{1}{2} \\ 5\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

er punktet i kolonnerommet til A som har minst avstand fra $\mathbf{b}$. △

Eksempel 12.3. Vi ønsker å bruke minste kvadrats metode på systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ i & i \\ 0 & i \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1+i \\ i \end{bmatrix}.$$

Vi ganger matrisen A på venstre side med sin adjungerte

$$\begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ 1 & -i & -i \end{bmatrix}$$

og får

$$\begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ 1 & -i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ i & i \\ 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vi ganger $\mathbf{b}$ med A^*, og får

$$\begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ 1 & -i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-i \\ 1+i \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-i \\ 3-2i \end{bmatrix}$$

Vi vil altså finne løsningen av systemet med totalmatrise

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1-i \\ 1 & 3 & 3-2i \end{array}\right].$$

Gausseliminasjon gir

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1-i \\ 1 & 3 & 3-2i \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1-i \\ 0 & 2 & 2-i \end{array}\right]$$

Løsningen er

$$\begin{bmatrix} -\frac{i}{2} \\ 1-\frac{i}{2} \end{bmatrix}.$$

Dette betyr at vektoren

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ i & i \\ 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{i}{2} \\ 1-\frac{i}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\frac{i}{2} \\ \frac{3}{2}+i \\ \frac{1}{2}+i \end{bmatrix}$$

er det punktet i kolonnerommet til matrisen A som minimerer avstanden til punktet $\mathbf{b}$. △

Polynominterpolasjon og regresjon

Som en anvendelse av minste kvadraters metoden ser vi på hvordan den hjelper å finne grafer som passer best til observerte data. Først minner vi om polynominterpolasjon, en metode vi har sett tidligere i semesteret. Så ser vi på situasjoner der vi trenger minste kvadraters metoden.

Vi husker at, hvis du har $n+1$ punkter (x_i, y_i) i $\mathbb{R}^2$, der x_i er forskjellig for alle punkter, vil det generelt være mulig å finne et reelt polynom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

hvis grafen går gjennom alle disse punktene, altså at

$$p(x_i) = y_i$$

for alle $1 \leq i \leq n+1$. Dette kalles *interpolasjon.* Likningene over utgjør et $(n+1)\times(n+1)$-likningssystem for koeffisientene a_i med totalmatrise

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 & & y_1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \dots & x_2 & 1 & & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n+1}^n & x_{n+1}^{n-1} & \dots & x_{n+1} & 1 & & y_{n+1} \end{array}\right]$$

Det kan vises at dette ligningssystemet alltid har entydig løsning så lenge $x_j \neq x_k$ for $j \neq k$, men det skal vi ikke gjøre. Det følger at du alltid kan interpolere $n+1$ punkter med et polynom av orden n på en entydig måte.

Eksempel 12.4. Vi prøver å finne et annengradspolyom som går gjennom punktene

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Et annengradspolynom skrives $p(x) = ax^2 + bx + c$, så likningssystemet blir

$$\begin{cases} c = 1 \\ a + \ b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases}$$

Løsningen er $a = 1$, $b = -2$ og $c = 1$, slik at polynomet blir $p(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. Det er lett å sjekke at polynomet tar de rette verdiene i $x = 0$, $x = 1$ og $x = 2$. △

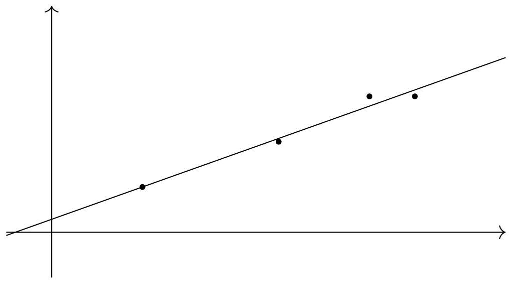
Dersom man prøver å gjøre den samme prosessen med et polynom som har orden $m < n$, vil man få det overbestemte $(n+1) \times (m+1)$systemet

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} x_1^m & x_1^{m-1} & \dots & x_1 & 1 & & y_1 \\ x_2^m & x_2^{m-1} & \dots & x_2 & 1 & & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n+1}^m & x_{n+1}^{m-1} & \dots & x_{n+1} & 1 & & y_{n+1} \end{array}\right]$$

Dette systemet har ikke nødvendigvis en løsning. Generelt kan vi derfor bare håpe på å finne en $m$tegradspolynom som minimerer avstanden til punktene. Minste kvadraters metoden er da akkurat teknikken vi trenger for å finne polynomet som passer til punktene.

Prosessen å finne polynomet som passer best til punkt kalles *regresjon.*

Det enkleste tilfellet er at vi har n punkter i $\mathbb{R}^2$ og vil finne linjen som passer best til disse punktene, dvs har minst avstand til alle punktene. Dette problemet oppstår for eksempel når vi observerer data med to koordinater og vi vil finne en linærsammenheng som passer best til dataene.



Hvis $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ er datapunktene i $\mathbb{R}^2$ så kan vi prøve å finne linjen

$$y = ax + b$$

som passer best til disse punktene.

Hvis punktene ligger på en linje så kunne vi finne a og b slik at

$$y_1 = ax_1 + b,\ y_2 = ax_2 + b, \dots \text{ og } y_n = ax_n + b.$$

Disse ligningene kan vi sammle i en matriseligning

$$A \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \mathbf{y} \text{ med } A = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}. \tag{12.1}$$

Det betyr at hvis vi kan løse ligningssystemet 12.1, så har vi linjen punktene ligger på. Hvis punktene ikke ligger på en linje, kan vi bruke minste kvadraters metode på systemet 12.1 for å finne a og b som gir oss linjen som approksimerer punktene best.

Eksempel 12.5. Vi har observert datapunktene $(0, 4)$, $(1, -1)$, $(2, 1)$, $(3, -3)$ og $(4, -1)$. Vi vil finne linjen $y = ax + b$ som passer best til disse punktene.

Vi vil altså finne minste kvadraterslosning til systemet $A \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \mathbf{y}$ med

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Vi må altså løse ligningssystemet $A^T A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = A^T \mathbf{y}$ som er

$$\begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Gausseliminasjon gir

$$\left[\begin{array}{cc|c} 30 & 10 & -12 \\ 10 & 5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 5 & 12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -6/5 \\ 0 & 1 & 12/5 \end{array}\right].$$

Løsningen er $a = -\frac{6}{5}$ and $b = \frac{12}{5}$. Linjen som passer best til datapunktene er altså gitt ved

$$y = -\frac{6}{5}x + \frac{12}{5}.$$

△

Vi kan også spørre for annengrads- eller ntegradspolynomer som approksimerer datapunkt best. La oss derfor se på et eksempel til:

Eksempel 12.6. Vi prøver å finne et annengradspolyom som går gjennom punktene

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Likningssystemet blir nå

$$\begin{cases} \phantom{4a + 2b +{}} c = 1 \\ a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 1 \\ 9a + 3b + c = 2 \end{cases}$$

Dette systemet har ingen løsning, men vi kan bruke minste kvadraters metode. Matrisen er:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

mens høyresiden $\mathbf{b}$ er:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Den adjungerte A^* er:

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi ganger A^* med A og $\mathbf{b}$, og får

$$A^*A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 98 & 36 & 14 \\ 36 & 14 & 6 \\ 14 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

og

$$A^*\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Vi må løse systemet $A^*A = A^*\mathbf{b}$, altså systemet med totalmatrise

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 98 & 36 & 14 & 22 \\ 36 & 14 & 6 & 8 \\ 14 & 6 & 4 & 4 \end{array}\right].$$

Løsningen er

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{11}{10} \\ \frac{9}{10} \end{bmatrix}$$

slik at polynomet blir

$$p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{9}{10}.$$

△

Markovkjeder

Vi begynner med et eksempel.

Eksempel 12.7. Barna i en barnehage heier på fotballklubbene Arsenal London, Liverpool og Manchester United i Premier League. Barna er ennå ikke helt bestemt på hvilken klubb de liker best og noen skifter klubben fra sesong til sesong. Det vises at

- når et barn heier på Man United, er det en 50 % sannsynlighet at barnet fortsatt heier på Man United neste sesong, en 30 % sannsynlighet at barnet heier på Liverpool neste sesong, og en 20 % sannsynlighet at barnet heier på Arsenal neste sesong;
- når et barn heier på Liverpool, er det en 20 % sannsynlighet at barnet heier på Man United neste sesong, en 80 % sannsynlighet at barnet fortsatt heier på Liverpool neste sesong, og en 0 % sannsynlighet at barnet heier på Arsenal neste sesong;
- når et barn heier på Arsenal, er det en 30 % sannsynlighet at barnet heier på Man United neste sesong, en 30 % sannsynlighet at barnet heier på Liverpool neste sesong, og en 40 % sannsynlighet at barnet fremdeles heier på Arsenal neste sesong.

Vi oppsummerer denne informasjonen i en tabell der vi uttrykker sannsynlighetene ved desimaltall:

bytter fra	M	L	A	**til**
	0.5	0.2	0.3	M
	0.3	0.8	0.3	L
	0.2	0	0.4	A

Dette ser allerede ut som en matrise

$$M = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

Faktisk hjelper oss matrise- og vektorregning til å finne ut hvordan klubbsupporten skifter fra år til år. For hvis fordelingen av barna på klubbene i et år er sånn at 50% heier på Man United, 30% på Liverpool og 2-% på Arsenal, så kan vi skrive det som en vektor

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.3 \\ 0.2 \end{bmatrix}.$$

Etter en sesong blir fordelingen da

$$\mathbf{x}_1 = M \cdot \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.3 \\ 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.37 \\ 0.45 \\ 0.18 \end{bmatrix}.$$

Etter to sesonger er det

$$\mathbf{x}_2 = M \cdot \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.37 \\ 0.45 \\ 0.18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.329 \\ 0.525 \\ 0.146 \end{bmatrix}.$$

Vi kan fortsette denne prosessen (under antagelsen at barna forblir mange år i barnehagen) og får fordelingene $\mathbf{x}_3 = M \cdot \mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_4 = M \cdot \mathbf{x}_3$ osv.

Vi ser da at fordelingen endrer seg mindre og mindre etterhvert og konvergerer til vektoren

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.6 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

som oppfyller

$$M \cdot \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.6 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.6 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \mathbf{q}. \tag{12.2}$$

△

Dette er et eksempel for en Markovkjede som er en prosess der sannsynligheten for overgangen fra tilstand på tidspunkt t til den neste avhenger bare fra tilstand t. Vi skal bare se på Markovkjeder der overgangen er gitt ved en matrise.

Definisjon. En *sannsynlighetsvektor* er en vektor $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ der alle koordinatene er større eller lik 0 og summen av koordinatene er lik 1.

En $n \times n$ matrise M kalles *stokastisk matrise* hvis kolonnene i M er sannsynlighetsvektorer, det vil si at elementene er ikke-negative og kolonnesummene er lik 1. △

Gitt en sannsynlighetsvektor $\mathbf{x}_0$ og en stokastiskmatrise M, så kan vi sjekke at $\mathbf{x}_1 = M \cdot \mathbf{x}_0$ også er en sannsynlighetsvektor. Derfor er også $\mathbf{x}_2 = M \cdot \mathbf{x}_1$ og $\mathbf{x}_{n+1} = M \cdot \mathbf{x}_n$ en sannsynlighetsvektor. Vi oppfatter $\mathbf{x}_n$ som tilstanden på tidspunkt n som oppstår fra utgangstilstanden $\mathbf{x}_0$.

Definisjon. La M være en stokastisk matrise og $\mathbf{x}_0$ en sannsynlighetsvektor. Vi kaller følgen av vektorene

$$\{\mathbf{x}_n\} \text{ for } n = 0, 1, 2, \ldots$$

en *Markovkjede.* △

I eksempel 12.7 møttes vi en Markovkjede og observerte at den konvergerer til en stabil tilstand. Vi stiller da selvfølgelig spørsmålet:

> *Konvergerer alle Markovkjeder til en stabil tilstand?*

For å finne svare på spørsmålet må vi undersøke stokastiske matriser. Ligning 12.2 uttrykker at 1 er en egenverdi for M med egenvektor $\mathbf{q}$. Vi skal nå se at dette alltid gjelder for stokastiske matriser.

Teorem 12.8. *En stokastisk matrise M har alltid 1 som en egenverdi.*

Bevis. La m_{ij} være elementet i M i rad i og kolonne j. Fordi M er en stokastisk matrise er kolonnesummene lik 1, dvs $\sum_i m_{ij} = 1$ for alle $i = 1, \ldots, n$. Den transponerte matrisen M^T har derfor radsummene lik 1. Vektoren $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ er derfor en egenvektor for

M^T til egenverdi 1:

$$M^T \cdot \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i m_{i1} \\ \sum_i m_{i2} \\ \vdots \\ \sum_i m_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nå observerer vi at egenverdiene til M^T er også egenverdiene til M (men egenvetkorene kan være forskjellige). □

Merk. La A være en $n \times n$-matrise. Egenverdiene til A^T og A er like fordi

$$\det(A^T - \lambda I_n) = \det\left((A - \lambda I_n)^T\right) = \det(A - \lambda I_n).$$

Det viser at λ er egenverdi for A hvis og bare hvis λ er en egenverdi for A^T. △

La M være en stokastisk matrise. Fordi 1 er egenverdi for M, vet vi at det finnes egenvektorer som hører til egenverdi 1. Vi vet at vi finner egenvektorene som hører til egenverdi 1 ved å finne ikke-trivielle løsninger for ligningssystemet

$$(M - I_n) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

En løsning $\mathbf{q}$ for dette ligningssystemet som også er en sannsynlighetsvektor, dvs som har koordinatsum lik 1 og alle koordinatene er ikke-negative, har en spesiel betydning for Markovkjeder. Derfor gir vi den et navn:

Definisjon. La M være en stokastisk matrise. En egenvektor for M som hører til egenverdi 1 og er en sannsynlighetsvektor kalles en *likevektsvektor*. △

Eksempel 12.9. I eksempel 12.7 finner vi likevektsvektoren:

$$\begin{aligned}
(M - I_3) &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} -0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & -0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & -0.6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -6 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & -12 \\ 0 & -2 & 12 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Det viser at løsningene er alle vektorer på formen $t\cdot$. Fordi vi leter etter en løsning som også er en sannsynlighetsvektor, er likevektsvektoren for M vektoren

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.6 \\ 0.1 \end{bmatrix}.$$

△

Vi kan lure på om det finnes kun én eller forskjellige likevektsvektorer for en stokastisk matrise. Faktisk er likevektsvektoren unik når vi krever at M oppfyller en liten ekstrabetingelse.

Definisjon. En stokastisk matrise M kalles *regulær* hvis det finnes en $k \geq 1$ slik at alle elementene i M^k er større enn 0. △

I eksempel 12.7 er M en regulær stokastisk matrise fordi

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0.37 & 0.26 & 0.33 \\ 0.45 & 0.7 & 0.45 \\ 0.18 & 0.04 & 0.22 \end{bmatrix}.$$

Spørsmål: Er matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 0.7 & 0.4 \\ 0 & 0.3 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}$ en regulær stokastisk matrise?

Teorem 12.10. *La M være en regulær stokastisk matrise. Da har M en unik likevektsvektor $\mathbf{q}$. For enhver utgangssannsynlighetsvetktor $\mathbf{x}_0$ konvergerer Markovkjeden $\{\mathbf{x}_n\}$ til $\mathbf{q}$ når $n \to \infty$.*

Bevis. Vi bare skissérer idéen for beviset:

Vektoren Markovkjeden konvergerer til, må være en likevektsvektor fordi

$$\begin{aligned}
M(\lim_{n\to\infty} x_n) = M(\lim_{n\to\infty} M^n x_0) &= \lim_{n\to\infty} M^{n+1} x_0 \\
= \lim_{n\to\infty} x_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} x_n.
\end{aligned}$$

Vi vet allerede at 1 er en egenverdi og at det derfor alltid finnes en vektor $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ med $A\mathbf{q} = \mathbf{q}$. Det som gjenstår er å vise at $\mathbf{q}$ er en sannsynlighetsvektor og at $\mathbf{q}$ er den eneste med denne egenskapen. Dette følger fra Perron-Frobenius-teoremet. Det tar litt tid til å bevise dette og vi nøyer oss har med å nevne at teoremet finnes. □

Merk. Vi observerer at vektoren Markovkjeden konvergerer til *ikke* avhenger av utganstilstanden $\mathbf{x}_0$. Det er et ganske overraskende resultat. Det betyr at når vi venter lenge nok, så spiller startpunktet ingen rolle. △

Oppgave: Finn likevektsvektorene for de stokastiske matrisene

- $A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}$
- $B = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$

Eksempel 12.11. En biolog studerer to kolonier med maur. Hun legger merke til at, når maurene er ute for å hente mat, går noen av maurene seg bort og bytter koloniene. Etter lang tid med observasjon finner hun at hver time

- skifter 5% av maurene fra koloni A til koloni B,
- mens 3% av maurene fra koloni B til koloni A.

På et tidspunkt teller hun at 55% av alle maurene hører til koloni A og 45% hører til koloni B.

> Oppgave: Finn en stokastisk matrise som beskriver migrasjonen. Kan du finne ut hva forholdet av maurene i koloniene blir etter mange timer?

△

Eksempel 12.12. Forskere vil løse klimaproblemet og tester forskjellige metoder for å transformere CO_2 i andre mindre skadelige gasser, vi kaller dem gass A og gass B. I eksperimentet foranderer seg det lukkede systemet med gassene hver dag etter det følgende mønsteret:

- 15% av gass A går over til gass B og 5% går over til CO_2, (dvs 80% av gass Aforblir gass A),
- 15% av gass B går over til gass A og 5% går over til CO_2,
- mens 10% av CO_2 går over til gass A og 10% av CO_2 går over til gass B.

Forskerne begynner med en fordeling der det er like mye av alle tre gassene is systemet.

> Spørsmål: Får forskerne være optimistiske?

△