Innlevering 1 (frist 25. januar)

Oppgaver til kapittel 0

1. Lag et lineært ligningssystem med tre ligninger og tre ukjente som

a) … har entydig løsning.

b) … ikke har noen løsning.

c) … har uendelig mange løsninger.

Skissér grafene i hvert tilfelle.

Oppgaver til kapittel 1

1. Løs ligningssystemene.

a) $$\begin{cases} 2x - 4y + 9z = -38 \\ 4x - 3y + 8z = -26 \\ -2x + 4y - 2z = 17 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x + 3y + 6z = 4 \\ 2x + 8y + 16z = 8 \end{cases}$$

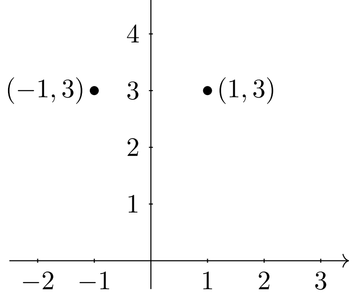
2. Er følgende to ligningssystemer ekvivalente? Begrunn svaret ditt.

$$\begin{cases} x = 1 \\ x + y = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

3. Er følgende to matriser radekvivalente? Begrunn svaret ditt.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

4. La $(-1,3)$, $(1,3)$ og $(2,6)$ være tre punkter i planet.



a) Bruk et lineært ligningssystem for å avgjøre om det er mulig å finne d og e slik at grafen til $f(x) = dx + e$ går gjennom de tre punktene. Finn d og e hvis det er mulig.

b) Finn et andregradspolynom $f(x) = ax^2 + bx + c$, slik at de tre punktene ligger på grafen til $f(x)$.

c) Husk at en funksjon f er like hvis $f(-x) = f(x)$ for alle x. Er polynomet du fant i **b)** like? Kunne du avgjort dette før du fant polynomet?

5. Se på ligningssystemet

$$\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = n \end{cases}$$

der a, b, c, d, m og n er konstanter, og vi antar at $ad \neq bc$.

Hvor mange løsninger har systemet? Finn løsningen(e) uttrykt ved a, b, c, d, m og n.

Hint: Start med å (i) multiplisere første rad med d og andre rad med b, eller (ii) multiplisere første rad med c og andre rad med a. Ta hensyn til at noen variabler kan være null.

Oppgaver til kapittel 2

1. Vis at

a) $z\overline{z}$ alltid er et reelt tall.

b) det ikke finnes to komplekse tall z og w, begge ulik null, slik at $zw = 0$.

c) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.

d) $(\overline{z})^n = \overline{z^n}$.

2. La z og w være følgende komplekse tall:

$$z = \frac{3\pi}{4} i \qquad w = -\frac{3\pi}{4} i$$

a) Skriv tallet $e^z - e^w$ på polar form.

b) Skriv tallet e^z / e^w på polar form.

c) Er det enkelt å dele komplekse tall på polar form? Hva med addere? Sammenlign med kartesisk form, altså $a + bi$.

3. Skissér alle z i det komplekse planet som tilfredstiller

a) $\operatorname{Im} z > 0$.

b) $z^2 = 0$.

c) $z\overline{z} = 9$.

d) $z^6 = -1 + i\sqrt{3}$.

e) $z - (\overline{z - 2i}) = 0$.

4. Noen artige polygoner.

a) Finn alle tredjerøttene til 1. Tegn en rett linje fra løsning til løsning, etter økende vinkel. Hva slags geometrisk figur er dette?

b) Repeter del **a)** for alle fjerderøttene til 1.

c) Repeter del **a)** for alle n-terøttene ($n \geq 3$) til 1.

d) Får vi samme geometriske figur i **c)** dersom vi bytter ut 1 med et reelt tall $r \neq 0$? Hva med et generelt komplekst tall $w \neq 0$?

5.

a) La n være et partall. Er det sant at n-terøttene til i er symmetriske om den reelle aksen? Hva med om origo? Hva om n er et oddetall?

b) La m og n være heltall større enn en. Vi sier at n deler m dersom $\frac{m}{n}$ er et heltall. Hva er sammenhengen mellom n-terøttene og m-terøttene til 1 dersom n deler m?
Hint: Prøv noen små, spesifikke eksempler for slike m og n. Skissér dem i det komplekse planet. Hva ser du?

c) Er observasjonen din i del **b)** fortsatt korrekt dersom vi erstatter 1 med et generelt komplekst tall w?

6. Løs ligningssystemene.

a)

$$\begin{aligned} (1+i)z - w &= i \\ (1-i)z + (1+i)w &= 1. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 2z + iw + (5-3i)u &= 10 \\ 4z + 2iw + (10+2i)u &= 20 + 16i \\ 2iz - w + (4+6i)u &= 2 + 12i \end{aligned}$$