Innlevering 2 (frist 15. februar)

Oppgaver til kapittel 3

1. Løs ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ for

a)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c)

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -7 & 0 \\ -8 & -7 & 3 \\ -4 & 5 & -8 \\ -6 & 6 & -4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. La $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ være disse vektorene i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 8 \\ -8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Finn en vektor

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

slik at $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ spenner ut $\mathbb{R}^3$, og løs likningen $x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w} = 0$.

3. La p og q være følgende polynomer:

$$p(x) = x^2 + 5x - 3$$
$$q(x) = 4x^2 + 18x + 4$$

a) La s være polynomet $s(x) = x^2 + 8x + 2$. Finnes det konstanter a og b slik at

$$s(x) = a \cdot p(x) + b \cdot q(x)$$

for alle x?

b) Finn et andregradspolynom t som oppfyller følgende: For hvert andregradspolynom r skal det være mulig å finne konstanter a, b og c slik at

$$r(x) = a \cdot p(x) + b \cdot q(x) + c \cdot t(x)$$

Oppgaver til kapittel 4

1. La $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ være vektorer i $\mathbb{R}^2$, og A en 2×2-matrise slik at:

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Regn ut $A\mathbf{w}$, der $\mathbf{w} = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$.

2. Er følgende matriser inverterbare? I så fall, finn den inverse og sjekk at svaret ditt er riktig.

a) $\begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & i \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. La A og B være to 2×2-matriser. Betrakt likningen

$$AX = B,$$

hvor X er en ukjent 2×2-matrise.

a) Forklar hvorfor likningen er ekvivalent med å løse to 2×2-likningssystemer samtidig. Hvordan generaliseres denne påstanden for $n \times n$-matriser?

b) Løs likningen for $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

4. La A, B og C være 2×2-matriser. Betrakt likningen

$$AX + XB = C,$$

hvor X er en ukjent 2×2-matrise.

a) Hvorfor kan man *ikke* løse denne likningen som to 2×2-likningssystemer samtidig?

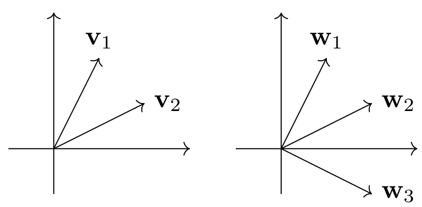
b) Skriv om likningen til fire likninger med fire ukjente. Hva er totalmatrisen?

c) Løs likningen når A, B og C er følgende matriser:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Oppgaver til kapittel 5

1. De to bildene viser vektorer i $\mathbb{R}^2$.



I hvert tilfelle: Er vektorene på tegningen lineært uavhengige? Utspenner de $\mathbb{R}^2$? Begrunn svarene dine.

2. Er vektorene lineært uavhengige?

a)

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix}1\\5\\-3\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}4\\18\\4\end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix}2\\4\\2i\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}i\\2i\\-1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}5-3i\\10+2i\\4+6i\end{bmatrix}$$

Oppgaver til kapittel 6

1. Regn ut determinanten til følgende matriser og avgjør om kolonnene er lineært uavhengige.

a) $\begin{bmatrix}1-i & 2\\1-i & 2\end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix}2 & -5 & 3\\2 & -4 & 7\\-6 & 15 & 1\end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix}2i & -5 & 3\\2 & -4i & 7\\-6 & 15 & i\end{bmatrix}$

2. Skisser parallellogrammet utspent av følgende vektorer i $\mathbb{R}^2$, og regn ut arealet.

a) $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$

3. Regn ut volumet av tetraederet i $\mathbb{R}^3$ med

$$(8,8,4), \quad (16,0,0), \quad (1,1,9) \quad \text{og} \quad (8,11,-4)$$

som hjørner. (Hint: Dersom tre vektorer er sidekanter i et tetraeder, er volumet av et tetraederet er en sjettedel av volumet til parallellepipedet utspent av de samme vektorene.)

4. La A være matrisen

$$\begin{bmatrix}a & b & 0 & 0\\c & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & x\\0 & 0 & y & z\end{bmatrix}.$$

a) Finn $\det A$ uttrykt ved a, b, c og x, y, z.

b) For hvilke a, b, c og x, y, z er A inverterbar?