Innlevering 3 (frist 8. mars)

Oppgaver til kapittel 7

1. Avgjør om følgende delmengder i $\mathbb{R}^2$ er underrom av $\mathbb{R}^2$.

a) Alle x, y slik at $x + y = 0$.

b) Alle x, y slik at $x + y = 1$.

c) $\mathbb{Q}^2$

2. La A og B være følgende matriser:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

a) Finn en basis for kolonnerommet, nullrommet og radrommet til A, og finn dimensjonen til hvert av disse rommene.

b) Gjør det samme for matrisen B.

c) Ligger vektoren $(0, 1, -2, 3, -1, -1, 1)$ i nullrommet til A? Ligger den i nullrommet til B?

d) Ligger vektoren $(-1, -1, -1, -1)$ i kolonnerommet til A? Ligger den i kolonnerommet til B?

3.

a) Finn en basis for $\mathcal{P}_2$. Vis at det faktisk er en basis.

b) Hva er koordinatene til $1 + 2x + 3x^2$ i basisen du fant for $\mathcal{P}_2$?

c) Finn en basis for $\mathcal{P}_n$, der $n \geq 0$.

4. La $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ være følgende vektorer i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Se på planet i $\mathbb{R}^3$ som består av alle vektorer på formen

$$\mathbf{u} + s \cdot \mathbf{a}_1 + t \cdot \mathbf{a}_2$$

der s og t er vilkårlige tall. Er dette planet et underrom av $\mathbb{R}^3$?

b) Er planet som består av alle vektorer på formen

$$\mathbf{v} + s \cdot \mathbf{a}_1 + t \cdot \mathbf{a}_2$$

et underrom av $\mathbb{R}^3$?

c) La $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{bmatrix}$ være matrisen som har $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ som kolonner. Ligger vektoren $\mathbf{u}$ i kolonnerommet til denne matrisen? Hva med $\mathbf{v}$? Sammenlign med det du fant ut i del **a)** og **b)**.

5. La A være en $m \times n$-matrise hvor $m < n$. Hvilke av følgende påstander kan vi da konkludere med?

a) $\dim \operatorname{Col} A > 0$

b) $\dim \operatorname{Null} A > 0$

Oppgaver til kapittel 8

1. Finn ut om funksjonen T er en lineærtransformasjon. Hvis den er det: Finn standardmatrisen til T, regn ut $\ker T$ og $\operatorname{im} T$, og finn ut om T er injektiv, og om den er surjektiv.

a) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \sin x + \cos y \\ -\sin y \end{bmatrix}$

b) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = e^x + e^y$

c) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8x - 7y \\ 3z - 8x - 7y \\ 5y - 4x - 8z \\ 6y - 6x - 4z \end{bmatrix}$

d) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$

e) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = x + 2y + 3z + 4w$

2. Finn standardmatrisen til lineærtransformasjonen

a) ... $S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som speiler planet om x-aksen.

b) ... $R\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som roterer planet med $\frac{3}{4}\pi$.

3. La S og R være som i forrige oppgave. Finn standardmatrisene til sammensetningene $S \circ R$ og $R \circ S$. Gi en geometrisk beskrivelse av hva disse lineærtransformasjonene gjør.

4. La $D\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ være funksjonen som sender hvert polynom til den deriverte av polynomet:

$$D(p) = p'$$

La $G\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ være funksjonen som ganger polynomet den får inn med x:

$$G(p) = q, \quad \text{der} \quad q(x) = x \cdot p(x).$$

a) Vis at D og G er lineærtransformasjoner.

b) Finn bildet og kjernen til D og til G.

c) Finn ut om D og G er injektive og/eller surjektive.

d) Beskriv lineærtransformasjonen $(D \circ G) - (G \circ D)$.

e) Nå begrenser vi oss til endeligdimensjonale polynomvektorrom. For hvert positive heltall n definerer vi lineærtransformasjoner

$$D_n : \mathcal{P}_n \to P_{n-1} \quad \text{og} \quad G_n : \mathcal{P}_{n-1} \to P_n$$

på samme måte som vi definerte D og G. Velg en passende basis for hvert av vektorrommene $\mathcal{P}_2$ og $\mathcal{P}_3$, og finn matrisene for D_3 og G_3 med hensyn på disse basisene.

5. La $D\colon \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ være funksjonen som er gitt ved derivasjon:

$$D(f) = f'$$

a) Vis at D er en lineærtransformasjon.
Hint: I Matematikk 1 lærte vi regneregler for derivasjon av i) en sum av to funksjoner og ii) en funksjon multiplisert med en konstant. Du kan bruke disse.

b) Finn kjernen $\ker D$ av lineærtransformasjonen D. Er $\ker D$ et endeligdimensjonalt vektorrom? I så fall: Finn en basis.

c) Er D surjektiv?
Hint: Analysens fundamentalteorem.

Oppgaver til kapittel 9

1. Finn egenverdier og tilhørende egenvektorer til følgende matriser.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

Hint for del **d)**: Polynomdivisjon. Hvis ikke $\lambda = 1$ fungerer, prøv $\lambda = 2$. Hvis ikke $\lambda = 2$ fungerer, prøv $\lambda = 3, \ldots$

2.

a) Vis at matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

ikke har noen reelle egenverdier.

b) Gi en geometrisk forklaring på del **a)**.

3.

a) Finn vektorene som svarer til at

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er blitt rotert med θ radianer.

b) Utled formelen for 2×2-matrisen T_θ som roterer vektorer θ radianer mot klokken ved multiplikasjon.
Hint: Hva skjer når du ganger T_θ med $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$?

c) For hvilke verdier av θ har T_θ en egenverdi? Gi en geometrisk forklaring.

4.

a) Regn ut egenverdiene til

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 77 \end{bmatrix}.$$

b) Finn egenrommene til de ulike egenverdiene.

c) A er en 4×4-matrise. Er det alltid enkelt å finne egenverdiene til en 4×4-matrise? Mer generelt, er det alltid enkelt å finne egenverdiene til $n \times n$-matriser?

5. La A være følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 28 & 30 & -20 & -2 \\ 6 & 40 & -10 & -4 \\ 4 & 10 & 20 & -6 \\ 2 & 20 & -30 & 32 \end{bmatrix}$$

a) Hvilke av vektorene

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er egenvektorer for A?

b) Finn alle egenverdiene til A, og de tilhørende egenrommene.

6. La A være en $n \times n$-matrise slik at $A^2 = A$. Hva kan du da si om egenverdiene til A?
Hint: Prøv å finne noen forskjellige matriser A som er slik at $A^2 = A$. Kan du finne en slik matrise som ikke har noen egenverdier? En som har én egenverdi? To egenverdier? Flere enn to?

7. Vis at dersom en matrise har egenverdien 0, er den ikke inverterbar.