Innlevering 4 (frist 5. april)

Oppgaver til kapittel 10

1. Finn matrisenes egenverdier og egenvektorer, og avgjør om matrisene er diagonaliserbare.

a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

2. Finn P og D slik at $A = PDP^{-1}$ for

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{bmatrix}.$$

3. La $A = \begin{bmatrix} r_1 & z \\ \overline{z} & r_2 \end{bmatrix}$ være en 2×2-matrise med $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ og $z \in \mathbb{C}$. Utled en formel for egenverdiene til A. Vis at egenverdiene er reelle.

4. La $a \neq b$ være to reelle tall, begge ulik null, og la

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{bmatrix}.$$

Avgjør om A er diagonaliserbar, og finn egenverdier og egenvektorer.

5. La $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ være lineærtransformasjonen mellom andregradspolynom gitt ved:

$$T(f) = (x+1)f'(x) + f(x).$$

a) Finn matrisen A til T med hensyn på basisen $(1, x, x^2)$.

b) Finn egenverdiene og egenvektorene A. Er A diagonaliserbar?

6. Lineærtransformasjonen $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, der A er matrisen

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

roterer vektorer i $\mathbb{R}^2$.

a) Hva er rotasjonsvinkelen?

b) Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisen.

c) Egenvektorene $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ danner en basis for $\mathbb{C}^2$. Hva er standardmatrisen til T i denne basisen?

Oppgaver til kapittel 11

1. La

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Finn den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$. Tegn $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og projeksjonen i samme koordinatsystem. Hva er vinkelen mellom vektorene?

2. La $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

a) Regn ut den ortogonale projeksjonen av $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ på $\mathbf{v}$.

b) Finn standardmatrisen $[P_\mathbf{v}]$ til $P_\mathbf{v}$.

c) Gi et geometrisk argument til å avgjøre om $P_\mathbf{v}$ er surjektiv og/eller injektiv.

d) Gi et geometrisk argument til å bestemme dimensjonen til $\ker P_\mathbf{v}$, $\mathrm{Null}[P_\mathbf{v}]$, $\mathrm{im}\, P_\mathbf{v}$ og $\mathrm{Col}[P_\mathbf{v}]$.

3. La $W = \mathrm{Sp}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ hvor

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

a) Finn en ortogonal basis for W.

b) Regn ut standardmatrisen $[P_W]$ til den ortogonale projeksjonen $P_W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ned på W.

c) Finnes det en 3×2–matrise A slik at $[P_w]A\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^2$? I så fall, finn den.
Hint: Tenk geometrisk her.

4. Vi ser på indreproduktrommet av stykkevis kontinuerlige funksjoner over $[0, 1]$.

a) Regn ut vinkelen mellom x og $\cos x$; x og $\sin x$. Hvilken vinkel er minst?

b) Regn ut avstanden mellom x og $\cos x$; x og $\sin x$. Hvilken avstand er minst?
Hint: Husk at avstanden mellom to vektorer f og g er lengden til $f - g$.

c) Skissér x, $\cos x$ og $\sin x$ på intervallet $[0, 1]$. Gi en geometrisk forklaring på de numeriske verdiene du fant i del **a)**–**b)**.

5. Vi ser på indreproduktrommet av stykkevis kontinuerlige funksjoner over $[0, 1]$.

a) Finn en ortogonal basis for $\mathrm{Sp}\{1, x, x^2\}$ ved å bruke Gram–Schmidt på 1, x og x^2, i den rekkefølgen.

b) Gir dette samme svar som **Eksempel 11.29** i notatet? Er dette et problem? Forklar.

6. La
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Kan du på forhånd avgjøre om A er diagonaliserbar?

b) Finn en ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$ som består av egenvektorer til A.

c) Bestem P og D slik at $A = PDP^{-1}$.

d) Er $P^{-1} = P^\top$?

7.

a) Anta at $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$. Vis at den inverse matrisen til $A = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \end{bmatrix}$ er gitt ved $A^{-1} = A^\top$.

b) Hvilke krav må man stille til egenvektorene for A for at man alltid kan velge egenvektorer slik at $A = PDP^\top$? I så fall: Hvordan?

Oppgaver til kapittel 12

1. Bruk minste kvadraters metode på det overbestemte systemet

a) $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$ **b)** $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1-i \\ i & i & -1 & 1+i \\ 0 & i & 0 & i \\ 0 & i & 1 & 1 \end{array}\right]$

2. Vi skal finne polynomer som passer til punktene
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

a) Det finnes et entydig fjerdegradspolynom som går gjennom alle punktene. Sett opp et ligningssystem for koeffisientene til dette polynomet.

b) Det finnes ingen annengradspolynomer som reiser gjennom alle punktene. Bruk minste kvadraters metode til å finne koeffisientene til det annengradspolynomet som passer best.

3. Finn likevektsvektorene til de stokastiske matrisene:

a) $\begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$

4. Er følgende stokastiske matriser regulære?

a) $P = \begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ 0.8 & 0 \end{bmatrix}$

b) $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}$

5. Temperaturen i Bymarka i løpet av vintersesongen kan enten være over, lik, eller under 0° Celsius. Trondheims skiklubb observerte de følgende svingninger i temperatur fra den ene dagen til den neste:

- Når temperaturen har vært over 0°, er det 70% sannsynlighet for at den vil være over og 10% sannsynlighet for at den vil være under 0° neste dag.
- Når temperaturen har vært lik 0°, er det 10% sannsynlighet for at den vil være over og 10% sannsynlighet for at den vil være under 0° neste dag.
- Når temperaturen har vært under 0°, er det 10% sannsynlighet for at den vil være over og 70% sannsynlighet for at den vil være under 0° neste dag.

Etter mange dager med dette mønsteret i vinter for hvilken temperatur bør en skiløper forberede sine ski? (Gi sannsynlighetene for de tre mulige temperaturene.)

6. Vis at en regulær stokastisk 2×2-matrise
$$M = \begin{bmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{bmatrix} \quad \text{med } 0 < a, b < 1$$
har en unik likevektsvektor.

Oppgaver til kapittel 13

1. Skissér faseplottet til systemet $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$ og forklar hvordan egenverdiene bestemmer bildet når

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} -3 & -9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

2. Finn en basis for løsningsrommet til $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$ og bestem generell løsning når

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

3. Løs initialverdiproblemene $A\mathbf{y} = \mathbf{y}'$, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ når

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

4. Vis at systemet
$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{y}'$$

med en gitt initialverdi $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ har en entydig løsning.

Hint: Du kan anta at løsningsrommet er tredimensjonalt.

5. Vi ser på det inhomogene systemet

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

a) Finn en basis for løsningsrommet til den tilhørende homogene ligningen

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

b) Sjekk om $y = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix}$ eller $y = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$ er en løsning for systemet.

c) Finn en generell løsning for systemet.