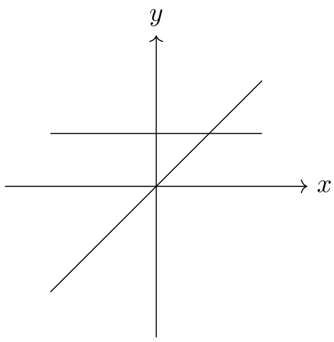
Løsningsforslag øving 1

0.1. **a)** og **c)** er lineære;**b)** er ikke.

0.2. Det finnes mange eksempler som alle tilfredstiller at

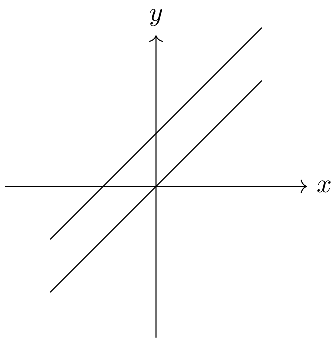
a) … linjene skjærer hverandre i ett punkt:

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ \qquad y = 1 \end{cases}$$



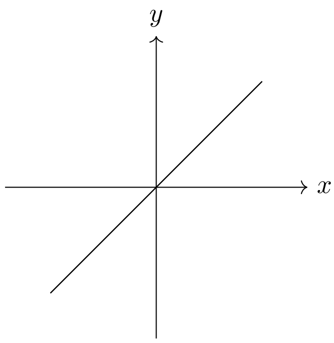
b) … linjene er parallelle:

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$



c) … linjene er helt like:

$$\begin{cases} -x + \ \ y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases}$$



1.1. Matrise (a), (c) og (d) er på trappeform; (a) er på redusert trappeform.

1.2. Metode: gausseliminasjon.

a) Radreduser totalmatrisen til systemet:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & 5 & 20 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 22 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Rad tre betyr

$$11z = 22,$$

som gir $z = 2$. Rad to betyr

$$-5y + 3z = 1,$$

sett inn $z = 2$ for å finne $y = 1$. Rad en betyr

$$x + z - y = 0,$$

sett inn $z = 2$ og $y = 1$ for å finne $x = 1$.

b) Radreduser totalmatrisen til systemet:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 3 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nederste ligning betyr

$$0x + 0y + 0z = 4,$$

eller $0 = 4$. Dette er ikke sant: Ingen løsning

c) Radreduser totalmatrisen til systemet:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Rad tre betyr

$$0x + 0y + 0z = 0,$$

eller $0 = 0$. Denne gir altså ingen krav til hva x, y og z kan være. Rad en og to gir to ligninger med tre ukjente:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ -5y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

Vi får en fri variabel. Her er det lurt å velge y eller z som fri variabel ettersom de er i begge ligningene. Jeg setter $z = t$ – men du må gjerne velge y, eller x. Den andre ligningen gir en parametrisering av y som funksjon av t:

$$y = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}t.$$

Innsatt i første ligning får vi en parametrisering av x som funksjon av t:

$$x + (-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}t) - t = 0,$$

eller

$$x = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}t.$$

Nå har vi en parametrisering av alle løsningene:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Men hvis jeg bytter ut t med $5t$ får vi en – kanskje – enda finere parametrisering:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Merk: Dersom du får en annen parametriser kan du sjekke at svaret ditt er riktig ved å verifisere om i) du har akkurat en fri variabel og ii) parametriseringen din tilfredstiller ligningen i oppgaven. Jeg skal være grei og gi deg et eksempel på ii) for x, y og z som ovenfor: Vi må sjekke om

$$x = \frac{1}{5} + 2t, \quad y = -\frac{1}{5} + 3t, \quad z = 5t,$$

tilfredstiller ligningene:

$$\begin{aligned} x + y - z &= \frac{1}{5} + 2t - \frac{1}{5} + 3t - 5t = 0 \\ 2x - 3y + z &= 2(\frac{1}{5} + 2t) - 3(-\frac{1}{5} + 3t) + 5t = 1 \\ 4x - y - z &= 4(\frac{1}{5} + 2t) - (-\frac{1}{5} + 3t) - 5t = 1 \end{aligned}$$

OK.

d) Radreduserer totalmatrisen til systemet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Dette er akkurat samme ligninger som vi reduserer til i del **c)**, og derfor har vi like løsninger:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1.3.

a) Polynomet $p(x) = ax^2 + bx + c$ skal gå gjennom de tre punktene. Dette betyr at $p(1) = 2$, $p(2) = 3$ og $p(3) = 5$. Sett inn det generell uttrykket for $p(x)$ for å se at vi får systemet

$$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ 9a + 3b + c = 5 \end{cases}$$

b) Som illustrert i oppgave **1.2.** radreduserer vi totalmatrisen til systemet i **a)**. Dette vil gi løsningene $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ og $c = 2$. Polynomet er

$$p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 2.$$

c) Ligningssystemet var satt opp for å finne et polynom $p(x)$, slik at $p(1) = 2$, $p(2) = 3$ og $p(3) = 5$. Er dette tilfellet? Vi setter inn 1, 2 og 3 i $p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 2$:

$$\begin{aligned} p(1) &= \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 1 + 2 = 2 \\ p(2) &= \frac{1}{2} \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 + 2 = 3 \\ p(3) &= \frac{1}{2} \cdot 3^2 - \frac{1}{2} \cdot 3 + 2 = 5 \end{aligned}$$

OK.

1.4.

La 1 betegne mulig og 0 umulig:

	$m < n$	$m = n$	$m > n$
ingen løsninger	1	1	1
én løsning	0	1	1
uendelig mange løsninger	1	1	1

Forklaring: I hvert tilfelle må vi enten finne et eksempel (i så fall er det jo mulig – vi fant et eksempel!), eller forklare hvorfor det ikke er mulig å finne et eksempel. Du oppfordres til å skjønne geometrien i forklaringene nedenfor.
$m < n$, ingen løsninger: Det finnes mange eksempler med to ligninger og tre ukjente ($2 < 3$). Hver av ligningene beskriver et plan i x–y–z-koordinatsystemet – vi har to frie variabler. Disse planene kan være parallelle. I dette tilfellet har vi ingen løsning.
$m < n$, én løsning: Vi har færre ligninger enn ukjente. Gitt et slikt system, sett opp en matrise som inneholder alle koeffisientene. Denne matrisen er lengre enn den er høy (fordi $m < n$). Dette betyr at vi umulig kan ha et pivotelement i hver kolonne. Hver kolonne som ikke har et pivotelement gir en fri variabel. Dermed må systemet enten ikke ha noen løsning eller ha uendelig mange løsninger. Men én løsning er umulig.
$m < n$, uendelig mange løsninger: Vi finner – igjen – et eksempel med to ligninger og tre ukjente. Denne gangen må planene de representerer skjære hverandre. Vi har uendelig mange løsninger fordi snittet er en linje.
$m = n$: Alle er mulige. Dette demonstreres for $m = n = 2$ i oppgave **0.1.**.

$m > n$, ingen løsninger: Det finnes mange eksempler med tre ligninger og to ukjente ($2 > 3$). Hver av ligningene beskriver en linje i x–y-koordinatsystemet – vi har én fri variabel. Ta ligninger som beskriver tre parallelle linjer.
$m > n$, én løsning: Tar $m = 3$ og $n = 2$ igjen. Denne gangen kan f. eks to av linjene være like mens den siste skjærer dem i nøyaktig ett punkt.
$m > n$, uendelig mange løsninger: Tar $m = 3$ og $n = 2$ igjen. Denne gangen tar vi ligninger som beskriver tre like linjer.

1.5.

a) M er trivielt radekvivalent med M.

b) Alle radoperasjoner er reversible; multiplisere en rad med et ikke-null tall c kan reverseres ved å multiplisere samme rad med $\frac{1}{c}$; bytte om på to rader kan reverseres ved å bytte om på radene igjen; å legge til et multiplum av en rad til en annen kan reverseres ved å trekke fra det som ble lagt til. Dersom $M \sim N$ betyr det at vi har gjort et endelig antall radoperasjoner $\mathrm{O}_1, \ldots, \mathrm{O}_n$ for å lage N fra M. La O_i' være den reverse radoperasjonen til O_i. Da vet vi at $\mathrm{O}_1', \ldots, \mathrm{O}_n'$ kan brukes for å lage M fra N. Dette betyr at $N \sim N$.

c) Vi antar at $M \sim L$ og $L \sim N$. Med andre finnes det et endelig antall radoperasjoner $\mathrm{O}_1, \ldots, \mathrm{O}_n$ som lager L fra M, og at det finnes et endelig antall radoperasjoner $\mathrm{O}_{n+1}, \ldots, \mathrm{O}_{n+m}$ som lager N fra L. Men da kan vi jo starte med M og bruke alle radoperasjonene for å lage N fra M. Dette betyr at $M \sim N$