Løsningsforslag øving 2

2.1.

a)

$$(1+2i)^2 = 1+2i+2i+4i^2 = 1+4i-4$$
$$= -3+4i$$

b)

$$(1+2i)^3 = (1+2i)(1+2i)^2 = (1+2i)(-3+4i)$$
$$= -3+4i-6i+8i^2 = -3-2i-8$$
$$= -11-2i$$

c)

$$(1+2i)^7 = ((1+2i)^2)^2(1+2i)^3 = (-3+4i)^2(-11-2i)$$
$$= (9-12i-12i+16i^2)(-11-2i)$$
$$= (-7-24i)(-11-2i)$$
$$= 77+14i+264i+48i^2 = 29+278i$$

d)

$$(1+2i)(1+3i) = 1+3i+2i+6i^2$$
$$= -5+5i$$

e)

$$(1+2i)(1-2i) = 1-2i+2i-(2i)^2$$
$$= 1-2^2i^2 = 5$$

f)

$$\frac{1+2i}{1+3i} = \frac{(1+2i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}$$
$$= \frac{1-3i+2i-6i^2}{1^2+3^2}$$
$$= \frac{7-i}{10} = \frac{7}{10} - \frac{1}{10}i$$

g)

$$\frac{5}{-3+4i} = \frac{5(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)}$$
$$= \frac{-15-20i}{(-3)^2+4^2}$$
$$= \frac{-15-20i}{25} = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$$

h)

$$(\frac{2+i}{3-2i})^2 = \frac{(2+i)^2}{(3-2i)^2} = \frac{3+4i}{5-12i}$$
$$= \frac{(3+4i)(5+12i)}{(5-12i)(5+12i)}$$
$$= \frac{-33+56i}{5^2+12^2} = -\frac{33}{169} + \frac{55}{169}i$$

2.2. Husk at det finnes en oppskrift på å finne n-teroten til w:
1. Skriv w på polar form $w = re^{i(\theta+2\pi k)}$ (alle heltall k gir samme komplekse tall siden vinkelen ikke ser forskjell dersom du plusser på 2π).
2. Røttene er

$$\sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi}{n}k)}.$$

3. Det er egentlig bare n ulike komplekse tall her (nå plusser vi på $\frac{2\pi}{n}$, og må derfor iterere k n ganger for å komme rundt sirkelen). Jeg velger $k = 0, 1, \ldots, n-1$ fordi det er vanlig (men du kan starte på hvilken som helst k_0 og velge $k_0, k_0+1, k_0+2, \ldots k_0+(n-1)$):

$$\sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi}{n}k)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Avmerking: Husk at polar form $re^{i\theta}$ forstås som det komplekse tallet med lengde r og vinkel θ. Dermed kan tallene i punkt 3. enkelt skisséres i det komplekse planet.

a) Den kjente og kjære abc-formelen gir $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{19}i)$. Disse tallene er på kartesisk form og kan plottes som $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{19}}{2})$ og $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{19}}{2})$ i det komplekse planet.

b) Her er $w = 2i$. Tallet $2i$ ligger på den positive delen av den imaginære aksen. Derfor er vinkelen $\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$. Lengden er $r = \sqrt{0^2+2^2} = 2$. Innsatt i formelen ovenfor:

$$\sqrt[3]{2}e^{\frac{\pi}{6}i}, \sqrt[3]{2}e^{\frac{5\pi}{6}i}, \sqrt[3]{2}e^{9\frac{\pi}{6}i}.$$

c) Tallet 2 ligger på den positive reelle aksen. Derfor er vinkelen til 1 $0+2\pi k$. Lengden er $r = \sqrt{2^2+0^2} = 2$. Innsatt i formelen ovenfor:

$$\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2}e^{\frac{\pi}{2}i}, \sqrt[4]{2}e^{\pi i}, \sqrt[4]{2}e^{\frac{3\pi}{2}i}.$$

d) Tallet $2+2i = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ ligger på linjen $x = y$ i det komplekse planet. Derfor skjønner vi at vinkelen er $\theta = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$. Lengden er $r = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2^{\frac{3}{2}}$. Innsatt i formelen ovenfor:

$$2^{\frac{3}{10}}e^{\frac{\pi}{20}i}, 2^{\frac{3}{10}}e^{\frac{9\pi}{20}i}, 2^{\frac{3}{10}}e^{\frac{17\pi}{20}i}, 2^{\frac{3}{10}}e^{\frac{25\pi}{20}i}, 2^{\frac{3}{10}}e^{\frac{33\pi}{20}i}$$

2.3. Vi skriver hvert uttrykk på kartesisk form:

a)

$$\begin{aligned} z^4 = (a+ib)^4 &= (a+ib^2)(a+ib)^2 \\ &= (a^2+2iab+i^2b^2)(a^2+2iab+i^2b^2) \\ &= (a^2-b^2+2iab)^2 \\ &= (a^2-b^2)^2+2(a^2-b^2)(2iab)+4i^2a^2b^2 \\ &= (a^4-6a^2b^2+b^4)+4i(a^3b-ab^3) \end{aligned}$$

Dette betyr at vi har realdel $a^4-6a^2b^2+b^4$ og imaginærdel $4(a^3b-ab^3)$.

b)

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} &= \frac{1(a-ib)}{(a+ib)(a-ib)} \\ &= \frac{a-ib}{a^2+b^2} \\ &= \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2} \end{aligned}$$

Realdel: $\frac{a}{a^2+b^2}$.
Imaginærdel: $\frac{-b}{a^2+b^2}$.

c)

$$\begin{aligned} \frac{z-1}{z+1} &= \frac{a+ib-1}{a+ib+1} = \frac{(a-1)+ib}{(a+1)+ib} \\ &= \frac{((a-1)+ib)((a+1)-ib)}{((a+1)+ib)((a+1)-ib)} \\ &= \frac{(a-1)(a+1)-ib(a-1)+ib(a+1)-i^2b^2}{(a+1)^2+b^2} \\ &= \frac{(a^2+b^2-1)+2ib}{(a+1)^2+b^2} \\ &= \frac{a^2+b^2-1}{(a+1)^2+b^2} + i\frac{2b}{(a+1)^2+b^2} \end{aligned}$$

Realdel: $\frac{a^2+b^2-1}{(a+1)^2+b^2}$.
Imaginærdel: $\frac{2b}{(a+1)^2+b^2}$.

d)

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2} &= \frac{1}{(a+ib)^2} = \frac{1}{(a^2-b^2)+2iab} \\ &= \frac{(a^2-b^2)-2iab}{((a^2-b^2)+2iab)((a^2-b^2)-2iab)} \\ &= \frac{a^2-b^2}{((a^2-b^2)^2+(2ab)^2} + i\frac{-2ab}{((a^2-b^2)^2+(2ab)^2} \\ &= \frac{a^2-b^2}{a^4+2a^2b^2+b^4} + i\frac{-2ab}{a^4+2a^2b^2+b^4} \end{aligned}$$

Realdel: $\frac{a^2-b^2}{a^4+2a^2b^2+b^4}$.
Imaginærdel: $\frac{-2ab}{a^4+2a^2b^2+b^4}$.

2.4. Husk at

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Realdel: $r\cos\theta$.
Imaginærdel: $r\sin\theta$.

2.5. Husk at $|z|^2 = z\overline{z}$, $\overline{z+w} = \overline{z}+\overline{w}$ og $\overline{zw} = \overline{z}\overline{w}$ (du kan alternativt løse oppgaven ved å skrive på kartesisk form). Vi regner litt på venstre side av likheten vi ønsker å vise:

$$\begin{aligned} |z+w|^2+|z-w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)}+(z-w)\overline{(z-w)} \\ &= (z+w)(\overline{z}+\overline{w})+(z-w)(\overline{z}-\overline{w}) \\ &= z\overline{z}+z\overline{w}+w\overline{z}+w\overline{w} \\ &\quad + z\overline{z}-z\overline{w}-w\overline{z}+w\overline{w} \\ &= 2z\overline{z}+2w\overline{w} = 2|z|^2+2|w|^2 \end{aligned}$$

2.6.

a) Vi har at $(z-1)^3 = z^3-3z^2+3z-1$ slik at $z=1$ er en trippelrot.
Aletrnativt kan du gjette på løsningen $z=1$ og deretter bruke polynomdivisjon og abc-formelen.

b)

Fra **a)** har vi at ligningen kan skrives på formen

$$(z-1)^3 = 1 = e^{2\pi ki}.$$

Vi skal altså finne z slik at $z-1$ er en tredjerot av 1. Metoden beskrevet i oppgave **2.3.** viser at tredjerøttene til 1 er

$$e^{\frac{2\pi}{3}}, \quad e^{\frac{4\pi}{3}}, \quad 1.$$

Dermed har vi tre løsninger for $z-1$ som igjen gir tre løsninger for z:

$$z = 1+e^{\frac{2\pi}{3}}, 1+e^{\frac{4\pi}{3}}, 2.$$

Tredjerøttene til 1 ligger uniformt fordelt på sirekelen sentrert i origo med radius 1, men er forskjøvet til å ligge uniformt fordelt på sirkelen sentrert i $(1,0)$ med radius 1.

2.7. Anta at w er en løsning. Da vet vi at

$$a_nw^n + a_{n-1}w^{n-1} + ... + a_1w + a_0 = 0.$$

Konjugering av hele ligningen gir

$$\overline{a_nw^n + a_{n-1}w^{n-1} + ... + a_1w + a_0} = 0.$$

Husk at $\overline{z+w} = \overline{z}+\overline{w}$, slik at:

$$\overline{a_nw^n} + \overline{a_{n-1}w^{n-1}} + ... + \overline{a_1w} + \overline{a}_0 = 0.$$

Bruk at $\overline{zw} = \overline{z}\overline{w}$, og at $\overline{a} = a$ for reelle tall:

$$a_n\overline{w^n} + a_{n-1}\overline{w^{n-1}} + ... + a_1\overline{w} + a_0 = 0.$$

Du skal vise at $(\overline{w})^n = \overline{w^n}$ på innleveringen, slik at

$$a_n\overline{w}^n + a_{n-1}\overline{w}^{n-1} + ... + a_1\overline{w} + a_0 = 0.$$

Dette betyr jo akkurat at $\overline{w}$ er en løsning.

2.8. Ja: n punkt på sirkelen med radius 1, som starter med tallet 1, er uniformt fordelt. Prøv å lage en tegning som illustrerer dette!

Formell grunn: n-terøttene til 1 finner du ved å skrive $1 = e^{i2\pi k}$, hvor k er et vilkårlig heltall, og deretter opphøye i $\frac{1}{n}$. Dvs. $e^{i\frac{2\pi k}{n}}$. Her er det kun n forskjellige røtter. Disse beskrives vanligvis ved å velge $k = 0,1,2,\ldots,n-1$. Men av og til – som for eksempel nå – er det lurt å velge andre k-er som fortsatt gir alle løsningene. Velg k mellom $\pm\frac{n-1}{2}$ eller $\pm\frac{n}{2}$ (avhengig av om n er like eller odde). Nå kan vi presentere alle røttene på formen $e^{\pm\frac{k\pi}{n}}$. Husk at $\overline{e^{ix}} = e^{-ix}$; vi har altså presentert røttene på en slik måte at vi ser at den konjugerte også er en rot.

2.9. Vi gausseliminerer på vanlig måte. Merk at det er litt vanskeligere å dele komplekse tall (vi må gange nevner og teller med nevner konjugert).

a) Bytt rad en med rad to:

$$\begin{bmatrix} i & 1 & -1 \\ 1 & i & i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & i & i \\ i & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Legg til rad en multiplisert med $-i$ til rad to:

$$\begin{bmatrix} 1 & i & i \\ i & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & i & i \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Del rad to på 2, legg til rad to multiplisert med $-i$ til rad en:

$$\begin{bmatrix} 1 & i & i \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Løsning: $z = i$, $w = 0$.

b) Bytt rad en med rad to:

$$\begin{bmatrix} 1-i & 1 & 1 \\ 1 & i & 1+i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ 1-i & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Legg til rad en multiplisert med $-(1-i)$ til rad to:

$$\begin{bmatrix} 1-i & 1 & 1 \\ 1 & i & 1+i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -i & 1+i \\ 0 & -1-i & -2 \end{bmatrix}$$

Del rad to på $-1-i$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -i & 1+i \\ 0 & -1-i & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -i & 1+i \\ 0 & 1 & 1-i \end{bmatrix}$$

Legg til rad to multiplisert med i til rad en:

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ 0 & 1 & 1-i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2(1+i) \\ 0 & 1 & 1-i \end{bmatrix}$$

Løsning: $z = 2 + 2i$, $w = 1 - i$.

c) Bytt rad en med rad to:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ i & 1 & 1 & 1+i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} i & 1 & 1 & 1+i \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Del rad en med i:

$$\begin{bmatrix} i & 1 & 1 & 1+i \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -i & -i & 1-i \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dette betyr at vi har to ligninger:

$$z - iw - iu = 1 - i$$
$$w + u = 1.$$

Vi har en fri variabel. Jeg velger $u = t$ som fri variabel – men du må gjerne velge z eller w. Merk at frie variabler kan være alle komplekse tall nå fordi vi jobber med komplekse tall. Vi får med en gang at

$$w = 1 - t$$

som en funksjon av $t \in \mathbb{C}$. Sett inn i første ligning for å finne z som en funksjon av t:

$$z - i(1-t) - it = 1 - i,$$

eller

$$z = 1.$$

Vi parametriserer alle løsningene:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{C}.$$

Husk: Hvis du får en annen parametrisering, kan du sjekke om i) du har akkurat en fri variabel, og ii) at parametriseringen din tilfredstiller ligningen. Det var et eksempel på dette i forrige løsningsforslag.