Løsningsforslag øving 3

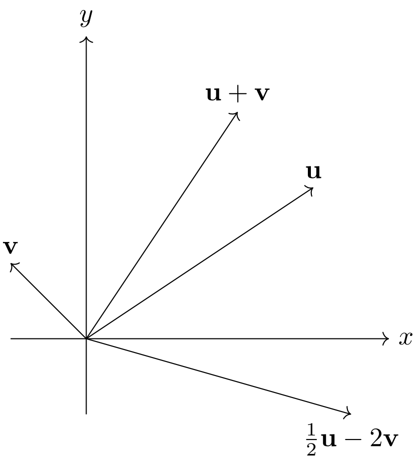
3.1.

a)

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3-1\\2+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\mathbf{u}-2\mathbf{v} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{3}{2}-2(-1)\\1-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{7}{2}\\-1\end{bmatrix}$$

b)



3.2. Husk at en vektorligning er det samme som et system av lineære ligninger; det er bare snakk om en forskjell i notasjon.

a)

$$x\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}1\\-3\\1\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\4\end{bmatrix}$$

b)

$$x\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}1\\-3\\-1\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}$$

c)

$$x\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}1\\-3\\-1\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

d)

$$x\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

3.3. For å løse denne oppgaven kan det være lurt å først være sikker på at du vet hva ordene i oppgaven betyr. Hva betyr det at en vektor er en lineærkombinasjon av andre vektorer? En vektor $\mathbf{v}$ er en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ dersom det finnes vekter/skalarer $a_1, a_2, \dots, a_n$ slik at

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_n\mathbf{v}_n.$$

Vi kan også skrive denne likheten som

$$\mathbf{v} - a_1\mathbf{v}_1 - a_2\mathbf{v}_2 - \dots - a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0},$$

og se at vi har løst ligningen

$$x_0\mathbf{v} + x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0};$$

$x_0 = 1, x_1 = -a_1, x_2 = -a_2, \dots, x_n = -a_n$.
For å svare på spørsmålet om en spesifikk vektor $\mathbf{v}$ er en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ kan vi altså prøve å finne en løsning av

$$x_0\mathbf{v} + x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

Men merk at vi ikke kan tillate hvilken som helst løsning. En løsning med $x_0 = 0$ er ikke greit: vi må dele resultatet på x_0 for å se at $\mathbf{v}$ er en lineærkombinasjon av de andre.
Oppgaven spør **ikke** om en spesifikk vektor er en lineærkombinasjon av en samling vektorer. I oppgaven lurer vi på om det finnes en vektor i en samling av vektorer som er en lineærkombinasjon av de andre. Pass på at du skjønner at disse spørsmålene er forskjellige! Det store spørsmålet er altså: Hvordan sjekker vi akkurat det oppgaven spør om?
Hvorfor ikke sjekke om alle vektorene er en lineærkombinasjon av de andre *samtidig*? Vi kan jo prøve å finne en løsning av

$$x_0\mathbf{v} + x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

med kravet at minst en $x_i \neq 0$: I så fall så vi at $\mathbf{v}_i$ er en lineærkombinasjon av de andre (bare sett løsningen inn i ligningen, del på x_i og flytt de andre vektorene over på høyre side av ligningen)!
Oppsummert: Vi trenger bare å sjekke om det finnes en løsning av

$$x_0\mathbf{v} + x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

med kravet at minst en $x_i \neq 0$.
Merk: En slik løsning kalles en *ikke-triviell* løsning, og at en slik løsning eksisterer er definisjonen på at $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots \mathbf{v}_n$ er lineært avhengige (som skal defineres senere i kurset).

a) Vi setter opp vektorligningen

$$x_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

for å sjekke om det finnes ikke-trivielle løsninger. Vi radreduserer koeffisientmatrisen – ettersom det ikke er nødvendig å ta med hele totalmatrisen når høyre side av ligningen er null – til dette ligningssystemet:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

Vi får en fri variabel (ingen pivotelement i kolonne nummer tre), og derfor kan vi finne en ikke-triviell løsning – vi har uendelig mange løsninger, alle kan ikke være lik nullvektoren.

Merk: At vi kan finne en ikke-triviell løsning er ekvivalent med at vi har en fri variabel. Nullvektoren er alltid en løsning på

$$x_0\mathbf{v} + x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

Så: Fri variabel gir uendelig mange løsninger; nullvektoren er bare en løsning, og en er ikke uendelig, så vi må ha andre løsninger i tillegg til nullvektoren. Hvis det ikke er en fri variabel har vi en unik løsning siden vi vet at nullvektoren er en løsning.

b) Vi sjekker om

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 5\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$$

har en fri variabel. Radredusering gir matrisen

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Vi har en fri variabel siden det ikke er et pivotelement i kolonne nummer tre.

3.4. I denne oppgaven er vi gitt en samling vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, og vi skal finne en vektor $\mathbf{b}$ som ikke er en lineærkombinasjon av disse. For å løse en slik oppgave må vi først forstå hva det vil si at en vektor ikke er en lineærkombinasjon av en samling vektorer. En vektor $\mathbf{b}$ er en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ hvis vi kan løse ligningen

$$\mathbf{b} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n.$$

Men vi ønsker å finne en vektor $\mathbf{b}$ som ikke er en lineærkombinasjon av disse vektorene; ikke er en løsning på denne ligningen.

Dette problemet kan derfor løses ved å sette opp ligningen for en generell vektor $\mathbf{b} = \begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}$, og radredusere totalmatrisen $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\mathbf{b}]$ for å finne ut av hvilke valg av $b_1, b_2, \ldots, b_n$ som ikke løser ligningen. Slapp av: jeg skal gjøre alt dette eksplisitt i deloppgave **a)**.

a) Vi skal finne en vektor $\mathbf{b} = \begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}$ som ikke er en lineærkombinasjon av

$$\begin{bmatrix}1\\ 5\\ -3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\ 18\\ 4\end{bmatrix}.$$

Vi må altså velge a, b og c slik at

$$x_1\begin{bmatrix}1\\ 5\\ -3\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}4\\ 18\\ 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}$$

ikke har løsning. Derfor radreduserer vi totalmatrisen:

$$\begin{bmatrix}1 & 4 & a\\ 5 & 18 & b\\ -3 & 4 & c\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 4 & a\\ 0 & -2 & b-5a\\ 0 & 16 & c+3a\end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix}1 & 4 & a\\ 0 & -2 & b-5a\\ 0 & 0 & c+3a+8(b-5a)\end{bmatrix}$$

Nederste rad er bare notasjon for ligningen

$$0x_1 + 0x_2 = c + 3a + 8(b-5a),$$

eller

$$c + 8b - 37a = 0.$$

Hvis vi velger a, b og c slik at denne ligningen ikke holder har ikke $\mathbf{b}$ en lineærkombinasjon av de to vektorene i oppgaven. Vi kan f. eks ta $c = 1$, $b = 1$ og $a = 1$ $(1 + 8 - 37 \neq 0)$. Et svar er $\mathbf{b} = \begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$.

b) Vi radreduserer totalmatrisen (nå er det fire komponenter i $\mathbf{b}$):

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & a\\ 2 & 3 & 4 & b\\ 3 & 4 & 5 & c\\ 4 & 5 & 6 & d\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & a\\ 0 & -1 & -2 & b-2a\\ 0 & -2 & -4 & c-3a\\ 0 & -3 & -6 & d-4a\end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & a\\ 0 & 1 & 2 & -b+2a\\ 0 & 2 & 4 & -c+3a\\ 0 & 3 & 6 & -d+4a\end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & a\\ 0 & 1 & 2 & -b+2a\\ 0 & 0 & 0 & -c+3a-2(-b+2a)\\ 0 & 0 & 0 & -d+4a-3(-b+2a)\end{bmatrix}$$

Både rad tre og rad fire er gode kandidater for å løse oppgaven. Jeg velger å se på rad tre (fordi den kommer først), men du må gjerne se på rad fire, eller finne et helt annet krav for at a, b, c og d ikke løser ligningen. Rad tre er notasjon for

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -c + 3a - 2(-b+2a),$$

eller

$$-a + 2b - c = 0.$$

Vi kan f. eks velge $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$ og $d = 1$ $(-1 + 2(-1) - 1 \neq 0)$. Et svar er $\mathbf{b} = \begin{bmatrix}1\\ -1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$.

c) Akkurat samme fremgangsmåte som i **a)** og **b)**. Husk at du kan sjekke om det endelige svaret ditt er riktig: Klarer du å løse

$$x_1\begin{bmatrix}8\\ -8\\ -4\\ -6\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}-7\\ -7\\ 5\\ 6\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}0\\ 3\\ -8\\ -4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{bmatrix}?$$

Hvis ja: du har gjort noe feil. Hvis nei: du har løst oppgaven.

3.5. I deloppgavene skal vi sjekke om $\begin{bmatrix}-3\\-7\\-3\\0\end{bmatrix}$ er en lineærkombinasjon av en samling vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots \mathbf{v}_n$. Til nå har vi tenkt masse på hva en lineærkombinasjon er, og er derfor enige i at spørsmålet er om

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n = \begin{bmatrix}-3\\-7\\-3\\0\end{bmatrix}$$

har en løsning. Som vanlig radreduserer vi totalmatrisen til systemet for å svare på dette spørsmålet.

a) Dette er umulig siden vektorene i **4. a)** er i $\mathbb{R}^3$ og $\begin{bmatrix}-3\\-7\\-3\\0\end{bmatrix}$ er i $\mathbb{R}^4$.

b) Vi prøver å løse

$$x_1\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}3\\4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\-7\\-3\\0\end{bmatrix}$$

Hvis du radreduser totalmatrisen kan du f. eks ende opp med:

$$\begin{bmatrix}1&2&3&-3\\2&3&4&-7\\3&4&5&-3\\4&5&6&0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&2&3&-3\\0&1&2&1\\0&0&0&-8\\0&0&0&-16\end{bmatrix}.$$

Siden $-8 \neq 0$ – og $-16 \neq 0$ – har vi ingen løsning. Svaret er nei.
Alternativ løsning: Du satt opp et krav for å garantere at en vektor ikke er en lineærkombinasjon av disse vektorene i oppgave **4.** Kravet jeg fant:

$$-a + 2b - c \neq 0.$$

Hvis vi setter inn de tre første komponentene til $\begin{bmatrix}-3\\-7\\-3\\0\end{bmatrix}$ ser vi at $-(-3) + 2(-7) - (-3) \neq 0$. Dette betyr også at svaret er nei.

c) Akkurat samme fremgangsmåte som i **b)**: Svaret er ja.

3.6. Planet som inneholder $\begin{bmatrix}-3\\-7\\-3\end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix}8\\-8\\-4\end{bmatrix}$ er akkurat det lineære spennet deres. Altså, alle vektorer på formen

$$a\begin{bmatrix}-3\\-7\\-3\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}8\\-8\\-4\end{bmatrix}.$$

Alle valg av a og b er riktig. Du kan f. eks ta $a = 1$ og $b = 1$ for å se at $\begin{bmatrix}5\\-15\\-7\end{bmatrix}$ ligger i planet deres.

3.7. Vi skal sjekke om to komplekse vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er lineært avhengige. Hva betyr dette? Oppgaven sier at dette betyr at det finnes et komplekst tall a slik at $\mathbf{u} = a\mathbf{v}$. Vi må altså løse ligningen $\mathbf{u} = z\mathbf{v}$, hvor z er et ukjent komplekst tall, i hver deloppgave.
Introduksjonen til løsningen på oppgave **3.3.** viser at vi alternativt kan sjekke om det finnes en ikke-triviell kompleks løsning på

$$z_1\mathbf{u} + z_2\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

bare del ligningen på z_1. Dette er kun mulig hvis vi har en fri variabel (nullvektoren er alltid en løsning). Vi kan derfor løse oppgaven med å radredusere $\begin{bmatrix}\mathbf{u} & \mathbf{v}\end{bmatrix}$.
Merk: diskusjonen ovenfor gir i alle fall to fremgangsmåter for å løse oppgaven. Begge vil bli illustrert.

a) Nå er $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}1+i\\1-i\end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}-1+i\\1+i\end{bmatrix}$. Vi skal sjekke om

$$\begin{bmatrix}1+i\\1-i\end{bmatrix} = z\begin{bmatrix}-1+i\\1+i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}z(-1+i)\\z(1+i)\end{bmatrix}$$

har løsning. Denne vektorligningen er ekvivalent med ligningsystemet

$$\begin{aligned}1+i &= z(-1+i)\\1-i &= z(1+i).\end{aligned}$$

I så fall må både $z = \frac{1+i}{-1+i}$ og $z = \frac{1-i}{1+i}$. Vi må sjekke om $\frac{1+i}{-1+i} = \frac{1-i}{1+i}$. Regn ut:

$$\frac{1+i}{-1+i} = \frac{(1+i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{-1-i-i-i^2}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i-i+i^2}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$$

Vi fant en løsning $z = -i$. Vektorene er lineært avhengige.

b) Vi radreduserer $\begin{bmatrix}\mathbf{u} & \mathbf{v}\end{bmatrix}$ med $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}1+i\\2+i\end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1-i\\2-i\end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix}1+i & 1-i\\2+i & 2-i\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & \frac{1-i}{1+i}\\2+i & 2-i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -i\\2+i & 2-i\end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix}1 & -i\\0 & 2-i-(2+i)(-i)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -i\\0 & 1+i\end{bmatrix}$$

Det er ingen frie variabler. Vektorene er ikke lineært avhengige.

c) Du kan bruke din favorittmetode for å se at vektorene er lineært avhengige.