Løsningsforslag øving 4

4.1. Husk at hvis M er en $m \times k$-matrise og N er en $q \times n$-matrise, så er produktet kun definert for $k = q$; summen kun definert for $m = q$ og $k = n$.

a) Gir ikke mening.

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ -8 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 0 + 2\cdot 2 + 5\cdot -8 & 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 5\cdot 0 & 1\cdot 5 + 2\cdot -1 + 5\cdot 2 \\ 0\cdot 0 + 0\cdot 2 + 3\cdot -8 & 0\cdot 1 + 0\cdot 3 + 3\cdot 0 & 0\cdot 5 + 0\cdot -1 + 3\cdot 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -36 & 7 & 13 \\ -24 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ -8 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ -8 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0\cdot 0 + 1\cdot 2 + 5\cdot -8 & 0\cdot 1 + 1\cdot 3 + 5\cdot 0 & 0\cdot 5 + 1\cdot -1 + 5\cdot 2 \\ 2\cdot 0 + 3\cdot 2 + -1\cdot -8 & 2\cdot 1 + 3\cdot 3 + -1\cdot 0 & 2\cdot 5 + 3\cdot -1 + -1\cdot 2 \\ -8\cdot 0 + 0\cdot 2 + 2\cdot -8 & -8\cdot 1 + 0\cdot 3 + 2\cdot 0 & -8\cdot 5 + 0\cdot -1 + 2\cdot 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -38 & 3 & 9 \\ 14 & 11 & 5 \\ -16 & -8 & -36 \end{bmatrix}$$

d) Gir ikke mening.

e) Gir ikke mening.

f)

$$\begin{aligned} A + I_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ -8 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \\ -8 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A + I_3)\mathbf{v} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \\ -8 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1\cdot 7 + 1\cdot 2 + 5\cdot -4 \\ 2\cdot 7 + 4\cdot 2 + -1\cdot -4 \\ -8\cdot 7 + 0\cdot 2 + 3\cdot -4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -11 \\ 26 \\ -68 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

g) Fra **b)**:

$$BA = \begin{bmatrix} -36 & 7 & 13 \\ -24 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Regner ut:

$$\begin{aligned} BA\mathbf{v} &= \begin{bmatrix} -36 & 7 & 13 \\ -24 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -36\cdot 7 + 7\cdot 2 + 13\cdot -4 \\ -24\cdot 7 + 0\cdot 2 + 6\cdot -4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -290 \\ -192 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

h)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

i)

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^\top \mathbf{v} &= \begin{bmatrix} 7 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \\ &= 7^2 + 2^2 + (-4)^2 \\ &= 69 \end{aligned}$$

Merk: Dette er jo prikkproduktet $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$!

4.2. Ligningen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

hvor

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

er en $m \times n$-matrise, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ er en gitt vektor og $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ er en ukjent vektor, er bare enda en notasjon for et system av m lineære ligninger med n ukjente (regn ut produktet på venstre side, og bruk at to matriser er like hvis og bare hvis de har like element):

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + x_n a_{1n} &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + x_n a_{2n} &= b_2 \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + x_n a_{mn} &= b_m \end{aligned}$$

Nå er

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Totalmatrisen til systemet:

$$\begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi har blitt utrolig flinke på å radredusere, og ser at

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi har en rad uten pivotelement, som betyr at det er en fri variabel. Rad tre og fire gir bare likheten $0 = 0$, veldig kjedelig. Vi skriver ut hva rad en og to betyr:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Du kan velge hvilken som helst av x_1, x_2 og x_3 som fri variabel. Denne gangen velger jeg ikke x_3, og ikke x_2, men x_1: bare for å illustrere at det som ikke er i alle ligningene og ikke kommer sist er helt greit å velge (men det er kanskje mer naturlig å velge x_3, eller x_2).

Jeg setter $x_1 = t$. Da tilfredstiller x_2 og x_3 følgende ligninger (som funksjoner av t):

$$\begin{aligned} t + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Vi setter inn $x_2 = \frac{1-t-3x_3}{2}$ (fra den første ligningen) inn i den andre ligningen for å se at $x_3 = 1 + t$. Dette uttrykket for x_3 innsatt i første ligning gir $x_2 = -1 - 2t$.

Vi skriver det endelige svaret: løsningene er alle

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t \\ -1-2t \\ 1+t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ hvor } t \in \mathbb{R}.$$

Merk: Ditt svar kan se annerledes ut siden det finnes uendelig mange måter å parametrisere svaret på. Men du kan sjekke at svaret ditt er riktig: Du skal ha akkurat en fri variabel og den generelle formelen din skal løse ligningen (sett inn).

4.3. La $\mathbf{e}_i$ være vektoren med 1 i komponent i og null ellers. Husk at for en $n \times n$-matrise er $A\mathbf{e}_i$ kolonnevektor nummer i: $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$,

$$A\mathbf{e}_i = 0\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_2 + \dots + 0\mathbf{a}_{i-1} + 1\mathbf{a}_i + 0\mathbf{a}_{i+1} + \dots + 0\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_i.$$

Vi kan derfor løse **a)** og **c)** direkte; det er jo kolonnevektorene til A som er oppgitt. I del **b)** og **d)** må vi skrive ut ligningene vi får, og deretter løse dem direkte. Eksempelvis, hvis vi skriver $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ og setter inn kravene fra del **b)** får vi

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ a_3 + a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Dette er fire ligninger med fire ukjente. Tilsvarende fremgangsmåte fungerer i **d)**, men nå er A en 3×3-matrise som gir $3 \cdot 3 = 9$ ligninger.

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

b) Skriv $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$. Kravene $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$ og $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ gir vektorligningene

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ a_3 + a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Husk at en vektorligning er et system av lineære ligninger. Så dette er jo bare fire ligninger med fire ukjente oppstilt to og to istedet for oppå hverandre:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \quad & a_1 + a_2 &= 3 \\ a_3 &= 8 \quad & a_3 + a_4 &= 4 \end{aligned}$$

kan like gjerne skrives

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_3 &= 8 \\ a_1 + a_2 &= 3 \\ a_3 + a_4 &= 4 \end{aligned}$$

Det er rett og slett unødvendig å gausseliminere her. Løsningene er:

$$\begin{aligned} & a_1 = 2 \\ & a_3 = 8 \\ & a_2 = 3 - a_1 = 3 - 2 = 1 \\ & a_4 = 4 - a_3 = 4 - 8 = -4 \end{aligned}$$

Det endelige svaret:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$$

c)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 99 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 145 & 2 \end{bmatrix}$$

d) Skriv

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}.$$

Kravene gir tre vektorligninger:

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + a_3 \\ a_4 + a_5 + a_6 \\ a_7 + a_8 + a_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 + a_3 \\ a_5 + a_6 \\ a_8 + a_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_3 \\ -a_6 \\ -a_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Dette er ni ligninger med ni ukjente:

$$
\begin{aligned}
a_1 + a_2 + a_3 &= 1 \\
a_4 + a_5 + a_6 &= 0 \\
a_7 + a_8 + a_9 &= 2 \\
a_2 + a_3 &= 3 \\
a_5 + a_6 &= 4 \\
a_8 + a_9 &= 5 \\
-a_3 &= 0 \\
-a_6 &= 4 \\
-a_9 &= -1
\end{aligned}
$$

Du kan sette opp en gigantisk 9×9-matrise for å løse oppgaven nå. Men det er heldigvis greit å se hva løsningene er. De siste tre ligningene gir

$$
\begin{aligned}
a_3 &= 0 \\
a_6 &= -4 \\
a_9 &= 1
\end{aligned}
$$

Sett inn i de tre ligningene i midten for å få

$$
\begin{aligned}
a_2 &= 3 - a_3 = 3 - 0 = 3 \\
a_5 &= 4 - a_6 = 4 - (-4) = 8 \\
a_8 &= 5 - a_9 = 5 - 1 = 4
\end{aligned}
$$

Til slutt bruker vi de tre første ligningene:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1 - a_2 - a_3 = 1 - 3 = -2 \\
a_4 &= 0 - a_5 - a_6 = -8 - (-4) = -4 \\
a_7 &= 2 - a_8 - a_9 = 2 - 4 - 1 = -3
\end{aligned}
$$

Svaret er

$$
A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}.
$$

4.4. Vektoren må være på formen $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ hvor minst en av a og b er forskjellig fra null. Vi skal sjekke om det finnes et reelt tall c slik at

$$
A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}
$$

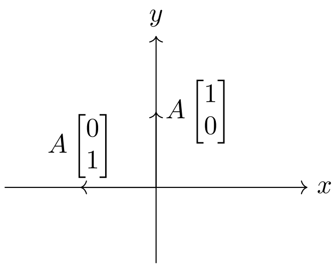
er lik $c \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca \\ cb \end{bmatrix}$. Dette gir to ligninger som må være oppfylt:

$$
\begin{aligned}
a &= ca \\
0 &= cb
\end{aligned}
$$

med kravet om at ikke både a og b kan være lik null. Fra den andre ligningen får vi to mulige tilfeller: en av b og c må være lik null.
$b = 0$, $c \neq 0$: Siden $b = 0$ må vi ha $a \neq 0$ slik at $a = ca$ gir $c = 1$. Vi kan altså ta $c = 1$ for vektorer på formen $\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$ med $a \neq 0$.
$b \neq 0$, $c = 0$: Vi ser at $a = ca = 0 \cdot a = 0$. Vi kan altså ta $c = 0$ for vektorer på formen $\begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$ med $b \neq 0$.
$b, c = 0$: Vi ser at $a = ca = 0 \cdot a = 0$. Men da er $a = 0$ og $b = 0$. Dette tilfellet er umulig.
Oppsummert: Vi kan ta $c = 1$ for vektorer på formen $\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$ hvor $a \neq 0$ og $c = 0$ for vektorer på formen $\begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$ hvor $b \neq 0$.
Hva svarer disse tilfellene til geometrisk?
$c = 0$: Ligningen er $A\mathbf{v} = 0\mathbf{v} = \mathbf{0}$ for vektorer $\mathbf{v}$ å formen $\begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$ med $b \neq 0$. Dette betyr at vektorer langs y-aksen sendes til null under multiplikasjon med A.
$c = 1$: Ligningen er $A\mathbf{v} = 1\mathbf{v} = \mathbf{v}$ for vektorer $\mathbf{v}$ å formen $\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$ med $a \neq 0$. Dette betyr at vektorer langs x-aksen ikke påvirkes under multiplikasjon med A.

4.5.
a) Vektorene blir rotert 90 grader mot klokken:

$$
\begin{aligned}
A\mathbf{e}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
A\mathbf{e}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$



b) Del opp en vilkårlig vektor $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ i vektoren $a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ langs x-aksen og $b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ langs y-aksen:

$$
\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2.
$$

Husk at matrisemultiplikasjon kommuterer med addisjon og skalarmultiplikasjon; $A(c\mathbf{v} + d\mathbf{w}) = cA\mathbf{v} + dA\mathbf{w}$. I vårt tilfelle blir dette

$$
A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = aA\mathbf{e}_1 + bA\mathbf{e}_2.
$$

I **a)** så vi at A roterer $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$ 90 grader mot klokken. Komponentene til $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ blir altså rotert 90 grader mot klokken, og derfor blir $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ rotert 90 grader mot klokken. Vi kan konkludere med at A roterer vektorer 90 grader mot klokken.
c) Den omvendte geometriske operasjonen er å rotere 90 grader med klokken. Derfor virker det rimelig at det finnes en matrise som gjør dette og er inversen til A. Dette er et fullgodt svar på oppgaven, men her er en matematisk forklaring på hva som foregår (for den interesserte studenten):
Inversen til A skal tilfredstille $A^{-1}A = I$. Hvis vi uttrykker A ved kolonnevektorer

$$
A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}
$$

ser vi at dette kan skrives

$$A^{-1}A = I$$
$$A^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_n\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}A^{-1}\mathbf{a}_1 & A^{-1}\mathbf{a}_2 & \dots & A^{-1}\mathbf{a}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_n\end{bmatrix}$$

Som betyr at A^{-1} sender/multipliserer kolonnevektorene til A tilbake til standardvektorene $\mathbf{e}_i$:

$$A^{-1}\mathbf{a}_i = \mathbf{e}_i.$$

I vårt tilfelle er $A = \begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ en matrise som roterer vektorer 90 grader mot klokken. Derfor må A^{-1} i alle fall rotere kolonnevektorene til A 90 grader med klokken – for å sende dem tilbake til $\mathbf{e}_i$-ene. *Senere* i kurset vil du være enig i at en kvadratisk (like mange kolonner som rader) matrise er inverterbar hvis og bare hvis alle vektorer kan skrives som en lineærkombinasjon av kolonnene dens. I vårt tilfelle betyr det at alle vektorer $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^2$ er på formen

$$x_1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}.$$

Du kan sjekke at sistnevnte er sant: hvilke vektorer kan skrives som en lineærkombinasjon av $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$? Du svarte på denne typen spørsmål i øving 3. Nå kan vi gjøre samme triks som i **b)**: A^{-1} roterer alle vektorer 90 grader med klokken fordi

$$A^{-1}(x_1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}) = x_1A^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + x_2A^{-1}\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$$

hvor $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$ blir rotert 90 grader med klokken (siden det er kolonnevektorene til A).

d) Bruk formelen for inversen til til 2×2-matriser for å se at

$$A^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}.$$

Du kan nå gjenta **a)-b)** med A^{-1} i stedet for A, og dermed sjekke at A^{-1} roterer en vektor 90 grader med klokken.

4.6.

a) Følger egentlig direkte fra definisjonen av matriseproduktet. Gitt to vektorer

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix}w_1\\w_2\\\vdots\\w_n\end{bmatrix},$$

så regner vi ut at

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^\top\mathbf{w} &= \begin{bmatrix}v_1 & v_2 & \dots & v_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\w_2\\\vdots\\w_n\end{bmatrix}\\ &= v_1w_1 + v_2w_2 + \cdots + v_nw_n\\ &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}\end{aligned}$$

b) Merk at $A^\top = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1^\top\\ \mathbf{a}_2^\top\\ \vdots\\ \mathbf{a}_n^\top\end{bmatrix}$ ettersom transponering gjør at kolonnevektorer blir radvektorer og vice versa. Derfor blir

$$A^\top A = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1^\top\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1^\top\mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1^\top\mathbf{a}_n\\ \mathbf{a}_2^\top\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2^\top\mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2^\top\mathbf{a}_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{a}_n^\top\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_n^\top\mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n^\top\mathbf{a}_n\end{bmatrix}.$$

Nå bruker vi antagelsen om at $\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{a}_j = 0$ for $i \neq j$ og $\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{a}_i = 1$ til å se at

$$A^\top A = \begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix} = I_n.$$

Dette betyr jo at $A^\top$ er den inverse matrisen til A, som er det vi skulle vise.

c) Matrisen A tilfredstiller kravene ettersom

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = 1,$$
$$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = 1,$$
$$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = 0 \text{ og}$$
$$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = 0.$$

Inversen er derfor

$$A^{-1} = A^\top = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}.$$

Du kan sjekke dette ved å bekrefte at $AA^\top$ eller $A^\top A$ er lik I_2:

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

d)

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1+i\\ -1+i\end{bmatrix}$$

Husk at $i^2 = -1$, som gir

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix}$$

På samme måte ser vi at

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -i\end{bmatrix} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ -i\end{bmatrix}$$

Dette betyr at matrisen A skalerer de komplekse vektorene $\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix}1\\ -i\end{bmatrix}$ med henholdsvis $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ og $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$.