Løsningsforslag øving 5

5.1.
a) Radreduser matrisen med oppgitte vektorer som kolonner eller sjekk direkte at det ikke finnes noe tall c slik at:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Fra den siste ligningen får vi tre ligninger som må være oppfylt (fordi to vektorer er like hvis og bare hvis alle komponentene er like):

$$\begin{aligned} 1 &= 4c \\ 5 &= 18c \\ -3 &= 4c \end{aligned}$$

Men dette er umulig, vi må f. eks ha at $\frac{-3}{4} = \frac{1}{4}$.
b) Husk at en samling vektorer er lineært uavhengige hvis og bare hvis ingen av vektorene er en lineærkombinasjon av de andre (Teorem 5.12 i notatet). Vi må derfor finne en tredje vektor $\mathbf{v}$ som ikke er en lineærkombinasjon av

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Men dette har du allerede gjort i oppgave **3.4. a)** øving 3! Se LF3.
c) Vi har tre lineært uavhengige vektorer

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{v}$$

i $\mathbb{R}^3$. Teorem 5.13 i notatet sier at tre lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^3$ spenner ut $\mathbb{R}^3$.

5.2. Påstand **a)** og **b)** er usanne; **c)** er sann.
a): Utsagnet er nesten riktig. Tre vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er lineært uavhengige dersom

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

kun har triviell løsning; $a = 0$, $b = 0$ og $c = 0$. Lineær avhengighet er det motsatte, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er lineært avhengige dersom

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

har en ikke-triviell løsning; kan ta en av a, b og c ulik null. Dette er ekvivalent med at *minst en* av $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ kan skrives som en lineærkombinasjon av de to andre (del likningen med den koeffisienten som ikke er lik null). Påstanden i oppgaveteksten er at $\mathbf{u}$ (altså en spesifikk vektor) kan skrives som en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ (de andre). Men dette kan vi ikke garantere! Et eksempel: La $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$ (en vilkårlig vektor langs y-aksen). Nå er de tre vektorene lineært avhengige i $\mathbb{R}^2$, men det finnes ikke a og b slik at $\mathbf{u} = a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$ fordi $\mathbf{u}$ ligger på x-aksen og de to andre ligger på y-aksen.
b): Du kan ta $\mathbf{w} = \mathbf{u}$ for å se at påstanden ikke stemmer. Mer generelt kan du ta hvilken som helst vektor i planet utspent av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ som ikke ligger på linjen utspent av $\mathbf{v}$. Prøv å tegne dette!
c): Du kan maksimalt ha n lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^n$ siden det bare er n retninger tilgjengelig. Så hvis vi har $m > n$ vektorer må de være lineært avhengige. Prøv å tenge dette for $m = 4$ og $n = 3$, eller $m = 3$ og $n = 2$.

5.3.
a) Påstanden er usann. Et veldig enkelt moteksempel:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Påstanden er sann.
Intuisjon: Du klarer ikke å få flere retninger enn du hadde før du multipliserte med A.
Bevis: Anta at vektorene $A\mathbf{v}_1$, $A\mathbf{v}_2$, …, $A\mathbf{v}_t$ er lineært uavhengige. Vi skal vise at $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_t$ også er lineært uavhengige.

Se på likningen

$$\mathbf{v}_1 x_1 + \mathbf{v}_2 x_2 + \cdots \mathbf{v}_t x_t = \mathbf{0}.$$

Anta at $(a_1, a_2, \ldots, a_t)$ er en løsning av denne likningen, altså at

$$\mathbf{v}_1 a_1 + \mathbf{v}_2 a_2 + \cdots \mathbf{v}_t a_t = \mathbf{0}.$$

Da får vi:

$$\begin{aligned} &(A\mathbf{v}_1)a_1 + (A\mathbf{v}_2)a_2 + \cdots + (A\mathbf{v}_t)a_t \\ &\quad = A(\mathbf{v}_1 a_1 + \mathbf{v}_2 a_2 + \cdots + \mathbf{v}_t a_t) \\ &\quad = A \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Men siden vi har antatt at $A\mathbf{v}_1$, $A\mathbf{v}_2$, …, $A\mathbf{v}_t$ er lineært uavhengige, betyr dette at vi må ha

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_t = 0.$$

Nå kan vi oppsummere det vi har gjort. Vi startet med å si at $(a_1, a_2, \ldots, a_t)$ er en løsning av likningen

$$\mathbf{v}_1 x_1 + \mathbf{v}_2 x_2 + \cdots \mathbf{v}_t x_t = \mathbf{0},$$

og konkluderte med at da må alle a-ene være 0. Det betyr at denne likningen kun har den trivielle løsningen, og dermed er vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_t$ lineært uavhengige.

6.1. Vi kan anta at vinklene θ og φ ligger i intervallet $[-\pi, \pi)$ fordi dette dekker hele sirkelen..

a) Det er kun vinkelen φ som har noe å si for om determinanten er positiv, negativ eller 0. Determinanten er 0 hvis φ er 0 eller $-\pi$ fordi vektorene ligger på samme linje i dette tilfellet. Ellers har determinanten samme fortegn. som φ.

b) Hvis vi øker α_1 eller α_2, så øker determinanten; hvis vi minsker en av disse, så minker determinanten. Dette svarer til at vi skalerer kolonnevektorene i A. Hvis vi varierer φ innenfor intervallet $[-\pi/2, \pi/2]$, så øker determinanten når φ øker. I intervallene $[-\pi, -\pi/2]$ og $[\pi/2, \pi)$ er det omvendt. Grunnen til dette er at determinanten er arealet av parallellogrammet vektorene spenner ut. Se for deg hva som skjer med dette arealet i de to tilfellene ovenfor!
Å variere θ har ingen effekt på determinanten: det er kun den relative vinkelen og lengden til vektorene som har noe å si.

c) Arealet av et parallellogram (altså determinanten til kantene) er grunnlinjen mutliplisert med høyde. Velg α_1 som grunnlinje. Vi finner høyden med litt trigonometri: høyden i parallellogrammet tilfredstiller

$$\sin\varphi = \frac{\text{høyde}}{\alpha_2}.$$

Derfor er $\det A = \alpha_1\alpha_2 \sin\varphi$.

6.2. Husk at hvis A og B er $n \times n$-matriser, så har vi ligningen

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

a) Sant: Husk at en matrise er inverterbar hvis og bare hvis determinanten er ulik null. Antagelsen er altså at $\det(AB) \neq 0$ hvor A og B er $n \times n$-matriser. Bruk at $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ for å se at $\det(A)$ og $\det(B)$ begge er ulik null (ellers ville determinanten til produktet vært null). Matrisene har determinant ulik null og er derfor inverterbare.

b) Sant: Vi vet at $AA^{-1} = I$. Så determinanten til AA^{-1} er lik determinanten til I. Men I er jo bare en diagonalmatrise med 1 langs hele diagonalen: I = 1. Bruk at $\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$ for å få

$$\det(A)\det(A^{-1}) = 1,$$

eller

$$\det(A) = \frac{1}{\det(A^{-1})}.$$

c) Usant: Hvis en $n \times n$-matrise A er inverterbar er også $-A$ inverterbar fordi $\det(-A) = (-1)^n\det(A)$. Hvis n er et partall får vi $\det(-A) = \det(A)$. Dette gir mange moteksempler. Eksempel: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ gir

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 2,$$

men

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

d) Sant:

$$\det(AB) = (\det A)(\det B) = (\det B)(\det A) = \det(BA)$$

6.3. Determinanten må være lik null.
Forklaring: Vi antar at $A\mathbf{u} - A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ for $\mathbf{u} - \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Ved regnereglene for matriser blir dette $A(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = 0$. Likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har altså en ikke-triviell løsning; $\mathbf{x} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$. Dette betyr at kolonnene til A er lineært avhengige. Determinanten er ulik null hvis og bare hvis kolonnene er lineært uavhengige. Derfor må determinanten være lik null.

6.4. $m \geq n$.
Forklaring: Husk at

$$A^\top A = \begin{bmatrix} A^\top \mathbf{a}_1 & A^\top \mathbf{a}_2 & \ldots & A^\top \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$$

hvor $\mathbf{a}_i$-ene er kolonnevektorene til A som befinner seg i $\mathbb{R}^m$. Hvis $m < n$ må disse være lineært avhengige fordi vi har flere vektorer enn retninger. Men da er det umulig at $A^\top \mathbf{a}_1, A^\top \mathbf{a}_2 \ldots A^\top \mathbf{a}_n$ – som er kolonnevektorene til $A^\top$ – er lineært uavhengige. Forklaringen på dette er oppgave **3. b)**: hvis de er lineært uavhengige må også kolonnene til A være lineært uavhengige ($A^\top$ er A og $\mathbf{a}_i$-ene er $\mathbf{v}_i$-ene i **3. b)**). Det er altså umulig at $m < n$.

6.5. Fra forrige oppgave har vi at $\det(A^\top \cdot A) = 0$ (nå har A og $A^\top$ byttet rolle).
Vi regner ut $\det(A \cdot A^\top)$.

$$A \cdot A^\top = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 5 & 1 & 4 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 5 \\ -2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & 8 \\ 8 & 50 \end{bmatrix}.$$

$$\det(A \cdot A^\top) = \det\begin{bmatrix} 20 & 8 \\ 8 & 50 \end{bmatrix} = 20 \cdot 50 - 8^2 = 936$$