Løsningsforslag øving 6

7.1. Husk Teorem 7.9 i notatet: En delmengde U av et vektorrom V er et underrom hvis 1) nullvektoren er i U, 2) summen av to vektorer i U er i U igjen, og 3) et skalarmultiplum av en vektor i U er i U igjen. Dette betyr at en delmengde U *ikke* er et underrom hvis *minst en* av kravene 1)-3) ikke holder.

a) Nei, den tilfredstiller ikke krav 3). Hvis $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ er hvilken som helst vektor i M slik at minst en av a og b er forkjellig fra null, så er ikke $-\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ i M. Eks: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ er i M, men $-\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ er ikke i M.

b) Ja. Vi sjekker krav 1)-3). Husk at mengden er består av alle vektorer $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ slik at $a - b + c = 0$.

1): Nullvektoren $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ tilfredstiller $0 - 0 + 0 = 0$, så den er i ønsket mengde.

2): Hvis $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$ er to vektorer i mengden, dvs.

$$a_1 - b_1 + c_1 = 0$$

og

$$a_2 - b_2 + c_2 = 0,$$

så tilfredstiller summen $\begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$ ligningen

$$\begin{aligned} &(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) + (c_1 + c_2) \\ &= (a_1 - b_1 + c_2) + (a_2 - b_2 + c_2) \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Dette betyr at summen er i mengden igjen.

3): Hvis $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ er en vektor i mengden, dvs.

$$a - b + c = 0,$$

og k er en skalar, så tilfredstiller $k \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka \\ kb \\ kc \end{bmatrix}$ ligningen

$$\begin{aligned} &(ka) - (kb) + (kc) \\ &= k(a - b + c) \\ &= k \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Dette betyr at skalarmultiplumet er i mengden igjen.

c) Nei. Ingen av kravene 1)-3) holder lengre (selv om vi bare byttet tallet 0 med 1 i del **b)**). Du trenger bare å forklare hvorfor ikke en av dem holder. Vi ser enkelt at nullvektoren ikke ligger i mengden ettersom

$$0 - 0 + 0 \neq 1.$$

Du kan tenke på hvorfor 2) og 3) feiler – hvis du vil. *Merk:* Ligningen svarer til et plan i $\mathbb{R}^3$ som ikke går gjennom origo. Kan du lage en tegning som illustrer at den ikke er lukket under addisjon eller skalarmultiplikasjon? I forrige oppgave har vi et plan som går gjennom origo. Kan du lage en tegning som illustrerer hvorfor dette er et underrom?

d) Nei. Den er ikke lukket under skalarmultiplikasjon siden vi tillater komplekse skalarer. Eks: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ligger i L, men $i \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix}$ ligger ikke i L.

e) Ja. Den eneste grunnen til at det ikke er et *komplekst* underrom, er at L ikke er lukket under kompleks skalarmultiplikasjon. Men hvis vi kun tillater multiplikasjon med reelle skalarer – som jo er tilfellet i reelle vektorrom – er ikke dette et problem. Vi sjekker 1)-3):

1) 0 er et reelt tall, så $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ er i L.

2) summen av to reelle tall er et reelt tall. Hvis $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$ er i L, dvs. a_1, b_1, a_2 og b_2 er relle, så er $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{bmatrix}$ i L siden $a_1 + a_2$ og $b_1 + b_2$ er relle tall.

3) hvis $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ er en vektor i L, dvs. a og b er reelle, og k er en reell skalar; et reelt tall. Så er $k \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka \\ kb \end{bmatrix}$ i L siden ka og kb er relle tall.

7.2. Snittet er et underrom; unionen er ikke nødvendigvis et underrom.

Union: Det er mange moteksempler. Du kan f. eks ta to linjer i $\mathbb{R}^2$ som kun krysser hverandre i origo. Hver linje er et underrom, men unionen er ikke lukket under addisjon (prøv å tegne dette!).

Snitt: både U_1 og U_2 inneholder null og er lukket under addisjon og skalarmultiplikasjon. Husk at $U_1 \cap U_2$ betyr U_1 og U_2: u er i snittet $U_1 \cap U_2$ hvis og bare hvis u er i U_1 og U_2 Null-vektoren ligger i U_1 og U_2 og derfor i $U_1 \cap U_2$; summen av to vektorer i $U_1 \cap U_2$ ligger i både U_1 og U_2 igjen (U_1 og U_2 er underrom) og derfor i $U_1 \cap U_2$; et skalarmultiplum av en vektor i $U_1 \cap U_2$ ligger i både U_1 og U_2 igjen (U_1 og U_2 er underrom) og derfor i $U_1 \cap U_2$.

7.3.

a) La $M_{i,j}$ være $m \times n$-matrisen som har 1 i posisjon (i,j) og 0 ellers. Samlingen $M_{i,j}$, $i = 1, \dots m$, $j = 1, \dots n$ er en basis. Grunnen er akkurat samme som grunnen til at vektorene $\mathbf{e}_i$, som har i-te komponent lik 1 og resten lik 0, er en basis til $\mathbb{R}^k$.
Formelt bevis: Vi må vise at samlingen $M_{i,j}$ er lineært uavhengig og at den spenner ut $\mathcal{M}_{m\times n}$ (fordi dette er definisjonen av en basis).
Lineært uavhengig: Anta at

$$\sum_{i,j} a_{i,j} M_{i,j} = 0,$$

hvor 0 er null-matrisen. Merk at venstre side ikke er noe annet enn matrisen

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

som skal være lik høyre side:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

To matriser er like hvis og bare hvis hvert element er likt. Derfor må alle $a_{i,j} = 0$. Så $M_{i,j}$-ene er lineært uavhengig per definisjon – her kan det være lurt å repetere definisjonen av lineær uavhengighet (hvis du ikke husker den).
Spenner ut: Skriv en vilkårlig matrise A i $\mathcal{M}_{m\times n}$ på elementform:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Dette betyr jo bare at

$$A = \sum_{i,j} a_{i,j} M_{i,j}.$$

Derfor spenner $M_{i,j}$-ene ut $\mathcal{M}_{m\times n}$ per definisjon – igjen, det kan være lurt å huske definisjonen av å spenne ut her.
Dimensjonen er antall element i en basis: mn.

b) U og W er underrom; V er ikke.
Vi har sett mange eksempler på hvordan man sjekker at en delmengde er et underrom. Du kan selv verifisere at U og W tilfredstiller krav 1)-3) fra løsningen til oppgave **7.1.**
Krav 1) og 2) er ikke oppfylt. Null-matrisen – som er nullvektoren i $\mathcal{M}_{m\times n}$ – er ikke invertibel (determinanten er null). Så V inneholder ikke nullvektoren. Dette er nok til å avgjøre at V ikke er et underrom.
Men du kan alternativt sjekke at summen av to inverterbare matriser ikke er inverterbar (generelt). Eks: identitetsmatrisen (I) tilfredstiller $I + (-I) = 0$. Her er I og $-I$ inverterbare, mens summen 0 ikke er inverterbar.

c) Basis for U: Matrisene $M_{i,i}$ for $i = 1, \dots, n$. Du kan sjekke at dette er en basis på samme måte som ovenfor.
Dimensjonen til U: n
Basis for W: Matrisene $M_{i,j} + M_{j,i}$ for $i \neq j$ og $M_{i,i}$ for $i = j$. De spenner ut fordi en vilkårlig symmetrisk matrise kan skrives på formen

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} & \dots & a_{n,1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{3,2} & \dots & a_{n,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{n,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i \geq j} a_{i,j}(M_{i,j} + M_{j,i}) \end{aligned}$$

Lineært uavhengig: ligningen

$$\sum_{i \geq j} a_{i,j}(M_{i,j} + M_{j,i}) = 0$$

betyr bare at

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} & \dots & a_{n,1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{3,2} & \dots & a_{n,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{n,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

så alle $a_{i,j} = 0$.
Intuisjon: Element (i,j) må være likt som element (j,i) for symmetriske matriser, derfor inneholder $M_{i,j} + M_{j,i}$ akkurat den informasjonen du trenger.
Dimensjonen til W: vi teller elementene langs og under diagonalen:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

7.4.

a) Vektorrommene $\mathcal{P}_n$, for forskjellige n, er underrom av hverandre på følgende måte:

$$\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2 \subset \cdots$$

Grunn: $\mathcal{P}_n$ er alle polynomer av grad mindre eller lik n. Vektorrommene $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$, for forskjellige n, også underrom av hverandre:

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}) \supset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \supset \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \supset \mathcal{C}^3(\mathbb{R}) \supset \cdots$$

Grunn: Hvis en funksjon er deriverbar er den spesielt kontinuerlig; hvis en funksjon er to ganger deriverbar er den spesielt en gang deriverbar; hvis en funksjon er tre ganger deriverbar er den spesielt to ganger deriverbar; hvis en funksjon er fire ganger deriverbar er den spesielt tre ganger deriverbare; osv. For hver n har vi:

$$\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}(\mathbb{R})$$

Alle n-tegradspolynomer er polynomer; alle polynomer er uendelig mange ganger deriverbare; alle uendelig mange ganger deriverbare funksjoner er deriverbare n ganger; alle n ganger deriverbare funksjoner er kontinuerlige (deriverbar impliserer kontinuitet).

b) Du skal vise at $\mathcal{P}_n$ har en endelig basis på innleveringen. Derfor er $\mathcal{P}_n$ endeligdimensjonalt. Vi har sett at $\mathcal{P}$ er uendeligdimensjonalt i notatet. Derfor er resten av vektorrommene uendeligdimensjonale; alle har et uendeligdimensjonalt underrom.

7.5. Ja, V er et vektorrom. Husk at parantes viser hvilken operasjon som skal gjøres først. Vi sjekker vektorromsaksiomene:
(V1): Bruk at multiplikasjon av reelle tall er assosiativt: $r(st) = (rs)t$.

$$\begin{aligned}
\boxed{r} + (\boxed{s} + \boxed{t}) &= \boxed{r} + \boxed{st} \\
&= \boxed{r(st)}, \qquad\qquad r(st) = (rs)t \\
&= \boxed{(rs)t} \\
&= \boxed{rs} + \boxed{t} \\
&= (\boxed{r} + \boxed{s}) + \boxed{t}
\end{aligned}$$

(V2): Bruk at multiplikasjon av reelle tall er kommutativt: $rs = sr$.

$$\begin{aligned}
\boxed{r} + \boxed{s} &= \boxed{rs}, \qquad\qquad rs = sr \\
&= \boxed{sr} \\
&= \boxed{s} + \boxed{r}
\end{aligned}$$

(V3): $\boxed{1}$ er nullvektoren.

$$\begin{aligned}
\boxed{r} + \boxed{1} &= \boxed{r \cdot 1} \\
&= \boxed{r} \\
&= \boxed{r}
\end{aligned}$$

(V4): Alle tallene i boksene er større enn null. Den additive inversen til $\boxed{r}$ er $\boxed{\frac{1}{r}}$.

$$\begin{aligned}
\boxed{r} + \boxed{\tfrac{1}{r}} &= \boxed{r \cdot \tfrac{1}{r}} \\
&= \boxed{1}
\end{aligned}$$

(V5): Bruk potensregelen $r^{ab} = (r^b)^a$.

$$\begin{aligned}
(ab) \cdot \boxed{r} &= \boxed{r^{ab}}, \qquad\qquad r^{ab} = (r^b)^a \\
&= \boxed{(r^b)^a} \\
&= a \cdot \boxed{r^b} \\
&= a \cdot (b \cdot \boxed{r})
\end{aligned}$$

(V6):

$$\begin{aligned}
1 \cdot \boxed{r} &= \boxed{r^1}, \qquad\qquad r^1 = r \\
&= \boxed{r}
\end{aligned}$$

(V7): Bruk potensregelen $(rs)^a = (r^a)(r^b)$.

$$\begin{aligned}
a \cdot (\boxed{r} + \boxed{s}) &= a \cdot \boxed{rs} \\
&= \boxed{(rs)^a} \qquad\qquad (rs)^a = (r^a)(r^b) \\
&= \boxed{(r^a)(s^a)} \\
&= \boxed{r^a} + \boxed{s^a} \\
&= a \cdot \boxed{r} + a \cdot \boxed{s}
\end{aligned}$$

(V8): Bruk potensregelen $r^{a+b} = (r^a)(r^b)$.

$$\begin{aligned}
(a+b) \cdot \boxed{r} &= \boxed{r^{a+b}}, \qquad\qquad r^{a+b} = (r^a)(r^b) \\
&= \boxed{(r^a)(r^b)} \\
&= \boxed{r^a} + \boxed{r^b} \\
&= a \cdot \boxed{r} + b \cdot \boxed{r}
\end{aligned}$$

7.6.

a) Nei.
$\mathbb{Z}$ er ikke lukket under skalarmultiplikasjon: Hvis du multipliserer et heltall med et reelt tall får du ikke nødvendigvis et heltall. Eksempel: $\frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$ er ikke et heltall.

b) Nei.
Du kan for eksempel sjekke at $(ab) * n \neq a * (b * n)$ for alle valg av relle tall a og b, og heltall n.
Eksempel: $\lfloor \frac{1}{2} \cdot 1 \rfloor = 0$ slik at $2 * (\frac{1}{2} * 1) = 0$. Men

$$(2 \cdot \frac{1}{2}) * 1 = 1 * 1 = 1.$$

Merk: Vi viste altså at $\mathbb{Z}$ med denne skalarmultiplikasjonen umulig kan være et vektorrom. Mer generelt kan man vise at det ikke finnes noen vektorromstruktur på $\mathbb{Z}$. Dette henger sammen med at noen typer uendelig er større enn andre.

7.7. Et vektorrom må bestå av minst ett element, nemlig nullvektoren.
Ett element er mulig: Mengden som kun inneholder nullvektoren er et vektorrom: vi verifiserer at $\{\mathbf{0}\}$ er et underrom av $\mathbb{R}^n$ i det reelle tilfellet (eller $\mathbb{C}^n$ i det komplekse tilfellet) – som automatisk gir at det er et vektorrom igjen. 1) Nullvektoren $\mathbf{0}$ ligger i $\{\mathbf{0}\}$. 2) Summen av to vektorer i $\{\mathbf{0}\}$ må være $\mathbf{0}+\mathbf{0} = \mathbf{0}$ som ligger i $\{\mathbf{0}\}$ igjen. 3) Et skalarmultiplum av en vektor i $\{\mathbf{0}\}$ er på formen $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$ som ligger i $\{\mathbf{0}\}$ igjen.
Er to element mulig? Intuitivt: Nei. I dette tilfellet har vi en ikke-null vektor, og derfor også hele linjen (i det reelle tilfellet; planet i det komplekse tilfellet) som denne vektoren spenner ut. Et formelt bevis på at intuisjonen stemmer: Anta at V er et vektorrom som inneholder minst to vektorer. Alle vektorrom må ha en nullvektor. Derfor finnes det (minst) én ikke-null vektor $\mathbf{v}$ i V. Men vi kan skalere vektoren $\mathbf{v}$ med uendelig mange skalarer (det er uendelig mange reelle tall og komplekse tall). Dvs. vektorrommet må inneholde en vektor $c\mathbf{v}$ for alle valg av skalarer c. Men dette gir uendelig mange forskjellige vektorer ($c\mathbf{v} = \mathbf{v}$

hvis og bare hvis $c = 1$). Derfor har vi automatisk uendelig mange vektorer i dette tilfellet.
Konklusjon: Det eneste endelige (reelle eller komplekse) vektorrommet er vektorrommet som kun inneholder nullvektoren.

7.8.

a) Husk definisjonen av lineær uavhengighet. Vi må svare på følgende spørsmål: finnes det konstanter/skalarer/vekter a, b og c – som ikke alle er null – slik at

$$a\cos(x) + b\sin(x) + c\tan(x) = 0$$

for alle x i D? Hvis ja: funksjonene/vektorene er lineært avhengige. Hvis nei: funksjonene/vektorene er lineært uavhengige. Merk at ligningen skal holde for alle valg av x ettersom to funksjoner f og g er like hvis og bare hvis $f(x) = g(x)$ for alle x. Derfor kan vi velge ulike x-er for å svare på spørsmålet!
Velg $x = 0$ for å se at $a = 0$ ettersom $\sin(0) = 0$ og $\tan(0) = 0$. Vi har $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ som gir ligningen

$$b\sin(x) = -c\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

for alle x i D . Sinus er aldri null for $x \neq 0$ i D slik at vi kan stryke $\sin(x)$ – på denne delen av D – og få ligningen

$$b\cos(x) = -c.$$

Men Cosinus er helt klart ikke konstant for alle $x \neq 0$ i D – den tar på seg mange ulike funksjonsverdier i dette området! Så b og c må være lik null. Det eneste løsningen er $a = b = c = 0$. Svaret på spørsmålet er *nei*; vektorene er lineært uavhengige.

b) Ja.
Eksempel på løsning: La E være ett punkt i D (du kan velge dette punktet vilkårlig). En funksjon fra ett punkt til $\mathbb{R}$ er jo bare et tall i $\mathbb{R}$. Vektorrommet $\mathcal{C}(E)$ er altså bare vektorrommet $\mathbb{R}$. Tre vektorer (tall) i $\mathbb{R}$ er selvfølgelig lineært avhengige (vektorrommet er endimensjonalt).

7.9.

a) Vi deler inn i to tilfeller avhengig av hvilket tall c er:
$c = 0$: I dette tilfellet er $c = 0$ automatisk oppfylt.
$c \neq 0$: I dette tilfellet kan vi multiplisere begge sider av

$$c \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

med $\frac{1}{c}$ som gir

$$\frac{1}{c} \cdot (c \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{c} \cdot \mathbf{0}.$$

Bruk (V8) og likheten $\frac{1}{c} \cdot c = 1$ for å se at venstre side er

$$\frac{1}{c} \cdot (c \cdot \mathbf{v}) = (\frac{1}{c} \cdot c) \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot \mathbf{v}.$$

Nå gir (V6) at

$$1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}.$$

I del **c)** skal vi vise at høyre side tilfredstiller

$$\frac{1}{c} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Til sammen får vi at $=\mathbf{0}$.

b) Fra likheten $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ får du, ved å bruke aksiom (V2) på begge sider:

$$\mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{u}$$

Vi vet fra aksiom (V4) at $\mathbf{u}$ har en additiv invers $-\mathbf{u}$. Legg til denne på hver side av likheten over; da får du:

$$(\mathbf{v} + \mathbf{u}) + (-\mathbf{u}) = (\mathbf{w} + \mathbf{u}) + (-\mathbf{u})$$

Bruk aksiom (V1) på begge sider:

$$\mathbf{v} + (\mathbf{u} + (-\mathbf{u})) = \mathbf{w} + (\mathbf{u} + (-\mathbf{u}))$$

Bruk aksiom (V4):

$$\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{w} + \mathbf{0}$$

Bruk aksiom (V3):

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}$$

c) Bruk (V3) på $\mathbf{0}$: $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$. Dette gir at

$$c \cdot \mathbf{0} = c \cdot (\mathbf{0} + \mathbf{0}).$$

Bruk (V7):

$$c \cdot \mathbf{0} = c \cdot \mathbf{0} + c \cdot \mathbf{0}$$

Fra (V4) vet vi at det finnes en additiv invers $-(c \cdot \mathbf{0})$ til $c \cdot \mathbf{0}$. Legg til denne i siste ligning:

$$c \cdot \mathbf{0} + (-(c \cdot \mathbf{0})) = (c \cdot \mathbf{0} + c \cdot \mathbf{0}) + (-(c \cdot \mathbf{0}))$$

Venstre side er $\mathbf{0}$. Bruk (V1) for å se at høyre side er

$$(c \cdot \mathbf{0} + c \cdot \mathbf{0}) + (-(c \cdot \mathbf{0})) = c \cdot \mathbf{0} + (c \cdot \mathbf{0} + (-(c \cdot \mathbf{0})))$$

og videre (V4) etterfulgt av (V3) for å få

$$(c \cdot \mathbf{0} + c \cdot \mathbf{0}) + (-(c \cdot \mathbf{0})) = c \cdot \mathbf{0} + \mathbf{0} = c \cdot \mathbf{0}.$$

Til sammen får vi at

$$\mathbf{0} = c \cdot \mathbf{0}.$$

d) Bruk (V6) for å se at $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$. Dette gir at

$$\mathbf{v} + (-1) \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot \mathbf{v} + (-1) \cdot \mathbf{v}.$$

Aksiom (V8) gir

$$\mathbf{v} + (-1) \cdot \mathbf{v} = (1 + (-1)) \cdot \mathbf{v}.$$

Vi vet at $1 + (-1) = 1 - 1 = 0$ slik at

$$\mathbf{v} + (-1) \cdot \mathbf{v} = 0 \cdot \mathbf{v}.$$

Bruk del **c** for å slå fast at

$$\mathbf{v} + (-1) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Det er et bevis for at den additive inversen $-\mathbf{v}$ til $\mathbf{v}$ er den unike vektoren som tilfredstiller

$$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

i notatet. Derfor er $(-1) \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{v}$.

7.10.

a) Det virker rimelig at en basis for $\mathcal{P}_n$ er gitt av $1, x \ldots, x^n$: dette er jo akkurat det vi trenger for å beskrive alle n-tegradspolynom. Av samme grunn virker det rimelig at $\mathscr{B} = \{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ er en basis for $\mathcal{P}$: dette er jo akkurat det vi trenger for å beskrive alle polynom.

b) Vi må vise at vektorene i $\mathscr{B}$ spenner ut $\mathcal{P}$ og er lineært uavhengige – fordi dette er definisjonen av en basis.
Spenner ut: Et vilkårlig polynom kan skrives på formen

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n$$

hvor noen koeffisienter muligens er lik null. Dette polynomet er automatisk en lineærkombinasjon av $1, x, x^2, \ldots, x^n$ som er en delmengde av $\mathscr{B}$; et polynom er helt klart en lineærkombinasjon av vektorer i $\mathscr{B}$.
Lineært uavhengig: Kravet for lineær uavhengighet blir – i vårt tilfelle – at en vilkårlig vektorligning

$$a_0 x^{i_0} + a_1 x^{i_1} + \cdots + a_k x^{i_k} = 0,$$

hvor x^{i_j}-ene er ulike potenser av x (ulike vektorer i $\mathscr{B}$), kun kan ha triviell løsning. Men dette er et i_k-tegradspolynom, og har derfor maksimalt i_k nullpunkt. Det eneste i_k-tegradspolynomet som er null for alle x er nullpolynomet. Nullpolynomet er det polynomet hvor alle koeffisientene er lik null, så vektorligningen kan kun ha triviell løsning.