Løsningsforslag øving 7

8.1. Husk at en funksjon er injektiv dersom $x \neq y$ gir $f(x) \neq f(y)$, men her ser vi at $f(3) = 9 = f(-3)$, eller generelt at $f(z) = z^2 = f(-z)$ for alle $z \in \mathbb{C}$, som betyr at f ikke er injektiv. Vi ser også at f er på formen z^n for et heltall n, og vi vet fra tidligere at alle funksjoner $z^n = w$, for komplekse tall z og w og heltall n, ifølge algebraens fundamentalteorme har en løsning. Dette betyr at for en gitt w så kan vi finne en z slik at $f(z) = w$. Dette betyr at f er surjektiv. Til slutt observerer vi at f ikke er bijektiv fordi f ikke er injektiv, da en funksjon må være både injektiv og surjektiv for å være bijektiv.

8.2. Vi vet at T er en lineærtransformasjon dersom $T(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = aT(\mathbf{x}) + bT(\mathbf{y})$ for alle skalarer $a, b \in \mathbb{R}$ og alle vektorer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$. Vi sjekker om dette stemmer i hvert av punktene under. I de tilfellene hvor T ikke er en lineærtransformasjon så er det godt nok å gi et moteksempel hvor $T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \neq T(\mathbf{x})+T(\mathbf{y})$ eller $T(a\mathbf{x}) \neq aT(\mathbf{x})$, enten generelt eller for noen utvalgte skalerer a og vektorer $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$.

a) Dette er ikke en lineærtransformasjon. Vi ser at

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} \tan(x) \\ e^y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tan(z) \\ e^w \end{bmatrix} \\ &\neq \begin{bmatrix} \tan(z+w) \\ e^{z+w} \end{bmatrix} \\ &= T\left(\begin{bmatrix} x+z \\ y+w \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

b) Dette er en lineærtransformasjon. Vi ser at

$$\begin{aligned} aT\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) + bT\left(\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}\right) &= a(2x+y) + b(2z+w) \\ &= 2(ax) + (ay) + 2(bz) + (bw) \\ &= T\left(a\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

Dermed går vi videre. Standardmatrisen A til lineærtranformasjonen T er

$$A = \begin{bmatrix} T(\mathbf{e_1}) & T(\mathbf{e_2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

For å finne kjernen til T så løser vi ligningssystemet $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = \mathbf{0}$, som gir oss at $2x + y = 0$, som igjen betyr at $2x = -y$. Det følger at $\ker T = \{\begin{bmatrix} -a \\ 2a \end{bmatrix} | a \in \mathbb{R}\}$, og dermed også at T ikke er injektiv.
Vi ser at bildet til T er et underrom av $\mathbb{R}$. Men spenner det ut hele $\mathbb{R}$? Vi lar a være et vilkårlig element fra $\mathbb{R}$, og sjekker om vi kan finne en vektor $\mathbf{v}$ slik at $T(\mathbf{v}) = a$. Det kan vi, ved å for eksempel sette $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}$. Det følger at $\operatorname{im} T = \mathbb{R}$, og dermed også at T er surjektiv.

c) Dette er ikke en lineærtransformasjon. Vi ser at

$$\begin{aligned} aT\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) + bT\left(\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}\right) &= a(2x+y-1) + b(2z+w-1) \\ &= 2(ax) + (ay) - a + 2(bz) + (bw) - b \\ &= 2(ax+bz) + (ay+bw) - (a+b) \\ &\neq 2(ax+bz) + (ay+bw) - 1 \\ &= T\left(a\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

Vi kan også se dette ved hjelp av et eksempel, hvor

$$T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = 1, \text{ og } T(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}) = 3,$$

som gir at

$$2T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = 2 \neq 3 = T(2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}).$$

d) Dette er ikke en lineærtransformasjon. Vi ser at

$$\begin{aligned} aT\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) &= a(x^2+y^2) \\ &= ax^2 + ay^2 \\ &\neq (ax)^2 + (ay)^2 \\ &= T\left(a\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

e) Dette er en lineærtranformasjon. Vi ser at

$$\begin{aligned} &aT\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) + bT\left(\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}\right) \\ &\quad= a\begin{bmatrix} x-5y+4z \\ y-6z \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} u-5v+4w \\ v-6w \end{bmatrix} \\ &\quad= \begin{bmatrix} ax-5ay+4az \\ ay-6az \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bu-5bv+4bw \\ bv-6bw \end{bmatrix} \\ &\quad= T\left(a\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

Dermed går vi videre. Standardmatrisen A til lineærtranformasjonen T er

$$A = \begin{bmatrix} T(\mathbf{e_1}) & T(\mathbf{e_2}) & T(\mathbf{e_3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}.$$

For å finne kjernen til T så løser vi lingingssystemet $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Vi ser at vi får en fri variabel,

og at $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 26 & 6 & 1 \end{bmatrix}^T$ er en løsning. Det følger at $\ker T = \mathrm{Sp}\{\begin{bmatrix} 26 & 6 & 1 \end{bmatrix}^T\}$, og dermed også at T ikke er injektiv.
Vi ser at bildet til T er et underrom av $\mathbb{R}^2$. Vi lar $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}^T$ være et vilkårlig element fra $\mathbb{R}^2$, og sjekker om vi kan finne en vektor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$ i $\mathbb{R}^3$ slik at $T(\mathbf{v}) = \mathbf{y}$. Det kan vi, ved å for eksempel sette $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a+5b & b & 0 \end{bmatrix}^T$. Det følger at $\operatorname{im} T = \mathbb{R}^2$, og dermed også at T er surjektiv.

f) Dette er en lineærtranformasjon. Sjekk at beregningene stemmer. Standardmatrisen A til lineærtranformasjonen T er

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kjernen til T er $\ker T = \mathrm{Sp}\{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\}$. T er dermed ikke injektiv. Bildet til T er et underrom av $\mathbb{R}^4$. Det er opplagt at T ikke er surjektiv ettersom første element i hver vektor i bildet til T må være 0, og vi kan dermed ikke finne noen $\mathbf{v}$ slik at $A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix}^T$ for $a \neq 0$ og vilkårlige $b, c, d \in \mathbb{R}$. Vi observerer at tredje kolonne i A kan skrives som en lineærkombinasjon hvor vi summerer andre og fjerde kolonne og trekker fra første kolonne. Alle kolonnene er parvis uavhengige, og vi kan dermed velge enhver kombinasjon bestående av tre av kolonnene til A for å lage en basis for bildet til A. Bildet til A er altså isomorft med $\mathbb{R}^3$, som et underrom av $\mathbb{R}^4$.

g) Dette er en lineærtranformasjon, og kan enkelt verifiseres på samme måte som i punkt **b)**. Standardmatrisen A til lineærtranformasjonen T er $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$. Kjernen til T er $\ker T = \mathrm{Sp}\{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T\}$. T er dermed ikke injektiv. Bildet til T er et underrom av $\mathbb{R}$. Vi ser at for et vikårlig element $a \in \mathbb{R}$, vi har at $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}a & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ sendes til a. Dermed er T surjektiv.

8.3. Vi vet at en vilkårlig vektor $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T$ kan skrives som en lineærkombinasjon $x\mathbf{e_1} + y\mathbf{e_2}$, og at T er en lineærtransformasjon. Da vil løsningen kunne skrives på formen $T(\mathbf{v}) = T(\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T) = xT(\mathbf{e_1}) + yT(\mathbf{e_2}) = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 9 \end{bmatrix}^T$. Det følger at $T(\mathbf{e_1}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}^T$ og at $T(\mathbf{e_2}) = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}^T$. Vi løser dette systemet og får at $x = 5$ og $y = 3$. Løsningen er altså $T(\begin{bmatrix} 5 & 3 \end{bmatrix}^T) = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 9 \end{bmatrix}^T$.

8.4. Ikke korrekt. Lineærtransformasjonene $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ er på formen $T(x) = ax$ (vi kan tenke på konstanten a som en 1×1-matrise). Dette kan vi se ved å sjekke om $T(x+y) = T(x) + T(y)$. Dette holder ikke generelt, og detfølger at må vi ha $b = 0$, og dermed også at $T(x) = ax$.

8.5.

a) Dette er standardbasisen 1, x og x^2.
Forklaring: Vi ønsker å skrive et vilkårlig andregradspolynom på formen $p(x) = p(0)f_1(x) + p'(0)f_2(x) + \frac{p''(0)}{2}f_3(x)$. Dette er akkurat hva $f_1 = 1$, $f_2 = x$ og $f_3 = x^2$ tilfredstiller: Gitt $p(x) = a + bx + cx^2$ ser vi at $p(0) = a$, $p'(0) = b$ og $\frac{p''(0)}{2} = c$ ved regning; dette er akkurat koeffisientene foran 1, x og x^2. Alternativ løsning: For en mer systematisk fremgangsmåte kan du følge metoden som er beskrevet i del **b)**.

b) Vi må finne tre polynom $e_(x)$, $e_2(x)$ og $e_3(x)$ som utgjør en basis slik at et vilkårlig polynom kan skrives på formen $p(x) = p(0)e_1(x) + p(1)e_2(x) + p(2)e_3(x)$ (da blir koordinatene $\begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{bmatrix}$). Dette skjer akkurat dersom $e_1(x)$ tilfredstiller

$$e_1(0) = 1 \quad e_1(1) = 0 \quad e_1(2) = 0,$$

$e_2(x)$ tilfredstiller

$$e_2(0) = 0 \quad e_2(1) = 1 \quad e_2(2) = 0,$$

$e_3(x)$ tilfredstiller

$$e_3(0) = 0 \quad e_3(1) = 0 \quad e_3(2) = 1$$

(sett inn i likningen for $p(x)$ uttrykt ved e_i'ene for å se dette).

e_1: Polynomet kan skrives på formen $a_0 + a_1x + a_2x^2$, og vi krever – fra likningene for e_1 – ovenfor at

$$a_0 = 1 \quad a_0 + a_1 + a_2 = 0 \quad a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0.$$

Dette er tre likninger med tre ukjente, og vi bruker radreduksjon for å se at løsningen er $a_0 = 1$, $a_1 = -\frac{3}{2}$ og $a_2 = \frac{1}{2}$. Polynomet er derfor $e_1(x) = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2$. Alternativ løsning: $e_1(1) = 0$ og $e_1(2) = 0$ betyr at $(x-1)$ og $(x-2)$ er faktorer av e_1. Derfor må $e_1(x) = a(x-1)(x-2)$. Kravet $e_1(0) = 1$ gir nå $1 = a \cdot (-1) \cdot (-2)$ slik at $a = \frac{1}{2}$. Derfor er $e_1(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$. Du kan gange ut for å se at dette er det samme polynomet som vi fant ovenfor.
e_2: Samme fremgangsmåte som for e_1 – med litt forskjellige likninger – gir polynomet $e_2(x) = 2x - x^2$.
e_3: Samme fremgangsmåte som for e_1 – med litt forskjellige likninger – gir polynomet $e_3(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2$.
Vi har nå tre polynom e_1, e_2 og e_3 som spenner $\mathcal{P}_2$ (det er konstruert slik at alle polynom kan skrives $p(x) = p(0)e_1(x) + p(1)e_2(x) + p(2)e_3(x)$). Det gjenstår kun å vise at de er lineært uavhengige. Men dette følger også fra hvordan e_i-ene er konstruert: Gitt en likning

$$x_1e_1(x) + x_2e_2(x) + x_3e_3(x) = 0$$

kan du sette inn for $x = 0, 1, 2$ for å se at $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ og $x_3 = 0$ på grunn av likningene som definerer e_i-ene.

c) Koordinatene til x^2:

$$[x^2]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} p(0) \\ p'(0) \\ \frac{p''(0)}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$[x^2]_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

d) Husk at en 3×3-matrise er bestemt av hvordan den endrer standardbasisen i $\mathbb{R}^3$.
T: I koordinatene til standardbasisen for $\mathcal{P}_2$ har vi at $[1]_{\mathscr{B}} = \mathbf{e}_1$, $[x]_{\mathscr{B}} = \mathbf{e}_2$ og $[x^2]_{\mathscr{B}} = \mathbf{e}_3$, hvor $\mathbf{e}_i$ er den i-te standardbasisen for $\mathbb{R}^3$, per definisjon av koordinater til en basis. Fra kommentaren ovenfor må vi ha at $T[1]_{\mathscr{B}} = [1]_{\mathscr{C}}, T[x]_{\mathscr{B}} = [x]_{\mathscr{C}}, T[x^2]_{\mathscr{B}} = [x^2]_{\mathscr{C}}$. Basisen $\mathscr{C}$ er konstruert slik at første koordinat er evaluering i 0, andre koordinat er evaluering i 1 og tredje koordinat er evaluering i 2. Derfor har vi

$$T = \begin{bmatrix} T\mathbf{e}_1 & T\mathbf{e}_2 & T\mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

S: Samme fremgang som for T. Husk at $e_1(x) = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2$, $e_2(x) = 2x - x^2$ og $e_3(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2$. I koordinatene til $\mathscr{B}$ har vi da at $[e_1]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $[e_2]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $[e_3]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Dette gir

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Vi sjekker at matrisen gir riktig endring av koordinater for x^2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dette viser at S endrer koordinatene til x^2 som ønsket. Gjør tilsvarende regning for T. Du kan også se at T og S er inverser, ved å multiplisere de sammen og få I_3. Vi har dermed at ethvert polynom representert i en av basisene kan oversettes til et polynom representert i den andre basisen, og så sendes tilbake til seg selv igjen.

8.6.

a)

$$[T_\theta] = \begin{bmatrix} T_\theta(\mathbf{e}_1) & T_\theta(\mathbf{e}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

b) Å bruke T_θ to ganger svarer til å rotere med en vinkel θ to ganger: $T_\theta \circ T_\theta = T_{2\theta}$. På matriseform har vi derfor

$$[T_{2\theta}] = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{bmatrix}.$$

Vi kan også regne ut dette produktet direkte:

$$[T_\theta]^2 = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) & -2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ 2\cos(\theta)\sin(\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{bmatrix}.$$

Fra element $(1,1)$, eller $(2,2)$, ser vi at $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$.

8.7. Poenget med denne oppgaven er å se noen større sammenhenger i lineæralgebra. Det er mange måter å vise disse sammenhengene, og det er viktig at implikasjonene går i begge retninger for hvert av punktene.

(I) **a)** $\Leftrightarrow$ **f)**. Per definisjon i kapittel 8 om isomorfier er T en isomorfi hvis og bare hvis det finnes en invers $S \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ slik at $T \circ S = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}$ og $S \circ T = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}$. La B være standardmatrisen til S. Fordi standardmatrisen til $\mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}$ er I_n får vi

$$AB = I_n = BA.$$

Det betyr at B må være den inverse matrisen A^{-1} til A.

Og omvendt, dersom A er inverterbar, så definerer A^{-1} en lineærtransformasjon $S \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ som er invers til T.

(II) **a)** $\Leftrightarrow$ **b)**. Dette følger fra teorem 6.12. Se bevis i notatene. Merk at dette beviset kun er gyldig for A en $n \times n$ matrise, og ikke generelt.

(III) **b)** $\Leftrightarrow$ **c)**. Dette følger fra teorem 5.13. Se bevis i notatene.

(IV) **b)** $\Leftrightarrow$ **d)**. Dette følger fra teorem 8.14.2. Bevis:

La $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, ..., \mathbf{a_n}$ være kolonnene i A, og anta at er lineært uavhengige. Se på ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Husk at $A\mathbf{x} = x_1 \cdot \mathbf{a_1} + \ldots + x_n \cdot \mathbf{a_n}$. Ettersom kolonnone er lineært uavhengige, så impliserer ligningen

$$A\mathbf{x} = x_1 \cdot \mathbf{a_1} + \ldots + x_n \cdot \mathbf{a_n} = \mathbf{0}$$

at $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Dette betyr at nullrommet til A kun består av nullvektoren. Ettersom A er standardmatrisen til T så er nullrommet til A det samme som kjernen til T. Vi vet så fra teorem 8.9 (se bevis i notatene) at en lineærtransformasjon er injektiv hvis og bare hvis kjernen kun består av nullvektoren. Dermed følger det at T er injektiv hvis og bare hvis kolonnene i A er lineært uavhengige.

(V) **c)** $\Leftrightarrow$ **e)**. Dette er resultatet i teorem 8.14.1. Bevis:

(i) **c)** $\Rightarrow$ **e)**. La $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, ..., \mathbf{a_n}$ være kolonnene i A, og anta at de spenner ut hele $\mathbb{C}^n$. La så $\mathbf{u}$ være et vilkårlig element i $\mathbb{C}^n$. Fordi kolonnene i A spenner ut hele $\mathbb{C}^n$, så vet vi at ethvert element i $\mathbb{C}^n$ kan skrives som en lineærkombinasjon av kolonnene i A. Da må det eksistere skalarer $c_1, c_2, ..., c_n$ i $\mathbb{C}^n$, hvor ikke alle er lik null, slik at $c_1 \cdot \mathbf{a_1} + c_2 \cdot \mathbf{a_2} + ... + c_n \cdot \mathbf{a_n} = \mathbf{u}$. Det betyr at

$$c_1 \cdot \mathbf{a_1} + \ldots + c_n \cdot \mathbf{a_n} = A\mathbf{c} = \mathbf{u}$$

der vi skriver $\mathbf{c}$ for kolonnevektoren med koordinatene $c_1, \ldots, c_n$. Fordi A er standardmatrisen til T, har vi $A\mathbf{c} = T(\mathbf{c})$. Da har vi vist at T kan nå alle elementer i $\mathbb{C}^n$, og dermed er T surjektiv.

(ii) **c)** $\Leftarrow$ **e)**. La T være surjektiv. Da har vi at T kan nå alle elementer i $\mathbb{C}^n$. Det betyr at hvis $\mathbf{w}$ er en vektor i $\mathbb{C}^n$, så finnes det en vektor $\mathbf{u}$ med $T(\mathbf{u}) = \mathbf{w}$. Ettersom A

er standardmatrisen til T så betyr dette at $A\mathbf{u} = \mathbf{w}$. Vi kan skrive dette igjen som

$$A\mathbf{u} = u_1 \cdot \mathbf{a_1} + \ldots + u_n \cdot \mathbf{a_n} = \mathbf{w}$$

der $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, ..., \mathbf{a_n}$ er kolonnene i A og $u_1, \ldots, u_n$ er koordinatene i $\mathbf{u}$. Dette betyr at kolonnene til A spenner ut hele $\mathbb{C}^n$.

Vi har dermed vist at alle påstandene er ekvivalente. Merk at i dette tilfellet så er det også sant at T er injektiv hvis og bare hvis T er surjektiv ettersom vi går fra en et domene til et kodomene som har samme størrelse. Dette er ikke sant på generell basis, som vi har sett i flere oppgaver i denne øvingen allerede. Så dersom det for ethvert element $\mathbf{w}$ i kodomenet finnes et unikt element i domenet som sendes til $\mathbf{w}$ (injektiv), så må vi nødvendigvis treffe alle elementene i kodomenet (surjektiv), og motsatt. Det følger da også at T er en isomorfi ettersom T er en isomorfi hvis og bare hvis T er både injektiv og surjektiv. På samme måte er ikke nødvendigvis alle kolonnene i A lineært uavhengige dersom A ikke er en kvadratisk matrise, så det er et viktig kriterium her for at alt skal kunne kobles sammen. Se figur på neste side for en oversikt over sammenhengene.

8.8.

a) T må være injektiv, og S må være surjektiv. Merk at dette er sant for generelle funksjoner.

b) Vi får at $\dim U = \dim W$ siden $U \cong W$, og $\dim V \geq \dim U$ siden T er injektiv (eller $\dim V \geq \dim W$ siden S er surjektiv).

Rent intuitivt gir det mening at dersom vi går fra et lite rom til et stort rom, så kan vi ikke treffe alle elementene. I tillegg, dersom vi går fra et stort rom til et lite rom så vil vi nødvendigvis treffe noen elementer flere ganger.

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{A er inverterbar}} \arrow[r, Leftrightarrow, "\text{Thm. 6.12}"'] \arrow[d, Leftrightarrow, "\text{Def.}"'] & \boxed{\text{Kolonnene i A er lineært uavhengige}} \arrow[r, Leftrightarrow, "\text{Thm. 5.13}"'] \arrow[d, Leftrightarrow, "\text{Thm. 8.14.2}"'] & \boxed{\text{Kolonnene i A utspenner $\mathbb{C}^n$}} \arrow[d, Leftrightarrow, "\text{Thm. 8.14.1}"'] \\
\boxed{\text{T er en isomorfi}} & \boxed{\text{T er injektiv}} & \boxed{\text{T er surjektiv}}
\end{tikzcd}
$$

Figur 0.1: Sammenhengene mellom bevis av påstander i oppgave 8.7.