Løsningsforslag øving 8

9.1.

a) For å finne egenverdiene til en matrise A så må vi finne røttene til det karakteristiske polynomet $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$, hvor A er en kvadratisk matrise og I er identitetsmatrisen av samme størrelse.

I denne oppgaven får vi, dersom vi kaller matrisen for A, at

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \det(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}) \\ &= \det(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}) \\ &= \lambda(\lambda - 1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Vi ser at denne ligningen har løsningene $\lambda_1 = 0$ og $\lambda_2 = 1$. Dette er egenverdiene til matrisen.

Egenvektorene til A er tilknyttet egenverdiene, og vi må finne ikke-null vektorer $\mathbf{x}_1$ og $\mathbf{x}_2$ slik at $A\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1$ og $A\mathbf{x}_2 = \lambda_2\mathbf{x}_2$. Vi ser at hvilken som helst vektor, for en gitt a, på formen $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & a \end{bmatrix}^T$ gir $A\mathbf{x}_1 = 0\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$. Vektoren $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ er dermed en egenvektor til λ_1. Vi ser også at hvilken som helst vektor, for en gitt a, på formen $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} a & 0 \end{bmatrix}^T$ gir $A\mathbf{x}_2 = 1\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2$. Vektoren $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ er dermed en egenvektor til λ_2.

Egenrommene til de forskjellige egenvektorene er rommene som blir spent ut av de tilhørende egenvektorene. I dette tilfellet er egenrommet til λ_1 hele x-aksen, og egenrommet til λ_2 er hele y-aksen.

b) Vi fant i forrige oppgave at egenrommene til de forskjellige egenvektorene λ_1 og λ_2 er, henholdsvis x-aksen og y-aksen. Vektorer langs y-aksen blir null-vektoren ved multiplikasjon av A; vektorer langs x-aksen er uendret ved muliplikasjon av A.

9.2.

a) I denne oppgaven får vi, dersom vi kaller matrisen for A, at

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \det(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}) \\ &= \det(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-2\lambda & 1 \\ 1 & 1-2\lambda \end{bmatrix}) \\ &= \frac{1}{2}((1-2\lambda)(1-2\lambda) - 1) \\ &= 2\lambda(\lambda - 1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Vi ser at denne ligningen også har løsningene $\lambda_1 = 0$ og $\lambda_2 = 1$. Dette er egenverdiene til matrisen.

Vi ser at vektoren $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ gir $A\mathbf{x}_1 = 0\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$. Vektoren $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ er dermed en egenvektor til λ_1. Vi ser også at vektorer $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ gir $A\mathbf{x}_2 = 1\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2$. Vektoren $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ er dermed en egenvektor til λ_2.

I dette tilfellet er egenrommet til λ_1 linjen spent ut av $\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T$, og egenrommet til λ_2 linjen spent ut av $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

b) Vektorer langs $(1, -1)$-linjen blir null-vektoren ved multiplikasjon; vektorer langs $(-1, 1)$-linjen er uendret ved muliplikasjon. Merk at man kan tolke x-aksen som linjen utspent av $(1, 0)$ og y-aksen som linjen utspent av $(-1, 1)$. Dette er altså helt lik situasjonen som i forrige oppgave, men nå er egenrommene rotert med 45 grader.

9.3.

a) Usant. Vi får generelt et n-tegradspolynom som kan ha alt fra null til n ulike løsninger (det er maksimalt n egenverdier).

b) Sant. Vi har – per definisjon – en ikke-null vektor $\mathbf{x}$ som tilfredsstiller $A\mathbf{x} = c\mathbf{x}$ hvor $c \neq 0$. Derfor har vi funnet en vektor $\mathbf{x}$ slik at $A\mathbf{x}$ ikke er lik null-vektoren. Men da kan A umulig være null-matrisen; hvis alle elementene i A var lik null ville $A\mathbf{x}$ vært lik null for alle valg av $\mathbf{x}$.

c) Sant. For eksempel har matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ egenvektorene $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ og $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, begge med egenverdi 1. De er lineært uavhengige.

9.4. Egenverdiene til A er løsninger på polynomet $\det(A - \lambda I) = 0$. Tilsvarende er egenverdiene til A^T løsninger på polynomet $\det(A^T - \lambda I) = 0$. Observer at $(A - \lambda I)^T = A^T - \lambda I$, fordi λI er symmetrisk. Da får vi at $\det(A^T - \lambda I) = \det((A - \lambda I)^T) = \det(A - \lambda I)$. Det følger at polynomene er like, og dermed også at de har samme egenverdier. Påstanden er bevist.

9.5.

a) Vi vet fra teorem 9.15 at egenvektorer som hører til forskjellige egenverdier er lineært uavhengige, og da følger det fra teorem 6.12 at matrisen V er inverterbar.

b) Vi regner ut

$$\begin{aligned}
V^{-1}AV &= V^{-1}\begin{bmatrix} A\mathbf{v}_1 & A\mathbf{v}_2 & \cdots & A\mathbf{v}_n \end{bmatrix} \\
&= V^{-1}\begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{v}_1 & \lambda_2\mathbf{v}_2 & \cdots & \lambda_n\mathbf{v}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} V^{-1}\lambda_1\mathbf{v}_1 & V^{-1}\lambda_2\mathbf{v}_2 & \cdots & V^{-1}\lambda_n\mathbf{v}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 V^{-1}\mathbf{v}_1 & \lambda_2 V^{-1}\mathbf{v}_2 & \cdots & \lambda_n V^{-1}\mathbf{v}_n \end{bmatrix} \\
&= D\begin{bmatrix} V^{-1}\mathbf{v}_1 & V^{-1}\mathbf{v}_2 & \cdots & V^{-1}\mathbf{v}_n \end{bmatrix} \\
&= DV^{-1}V \\
&= D,
\end{aligned}$$

der

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

er diagonalmatrisen bestående av egenverdiene til A.

Da kan vi dessuten legge merke til at vi har

$$A = VV^{-1}AVV^{-1} = VDV^{-1}.$$

(Oppgaven spurte ikke om dette, men det er likevel en interessant observasjon, og den hjelper oss med å løse neste deloppgave.)

c) Lag en diagonalmatrise D med egenverdiene på diagonalen, og en matrise V med egenvektorene som kolonner:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad V = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Da ser du fra del (b) at matrisen $A = VDV^{-1}$ oppfyller kravene i oppgaven. Regn ut inversen til V på vanlig måte; da får du:

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nå kan du gange sammen matrisene og ende opp med:

$$A = VDV^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & 2 & 2 \\ -36 & 9 & 6 \\ -22 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

9.6. Vi vet at kolonenne til en kvadratisk matrise er lineært avhengige hvis, og bare hvis, determinanten er 0.

a) Her er $\det(A) = 0$ så vi vet at kolonnene er lineært avhengige. Radreduserer vi matrisen får vi systemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Her har vi én nullrad som betyr at nullrommet har dimensjon 1. Vi velger $z = t$ som fri kompleks variabel og får at $x = t$ og $y = -2t$ som betyr at nullrommet er

$$\text{null}(A) = \text{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b) Matrisen har determinant ulik 0. Derfor er kolonnene lineært uavhengige, og nullrommet inneholder kun vektoren $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

c) Her er determinanten lik 0 så kolonnene er lineært avhengige. Vi finner radredusert form

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

for så å finne nullrommet. Dette er den samme matrisen som den vi fikk i a) og nullrommet blir derfor likt.

9.7.

a) Vi regner ut dette på vanlig måte. Determinanten er -2 og egenverdiene er $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = i$ og $\lambda_3 = -i$.

Egenrommene er utspent av de korresponderende egenvektorene

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) Her er determinanten 2 og vi har karakteristisk polynom

$$(\lambda + 1)^2(\lambda - 2)$$

som gir egenverdier $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1$ og $\lambda_3 = 2$. Merk at to av egenverdiene er like; da sier vi at egenverdien har multiplisitet lik to. Vi vet fra teorem 9.34 at egenrommet har dimensjon mindre enn eller lik multiplisiteten til egenverdien. Da vet vi at det finnes minst en egenvektor til denne egenverdien, og maksimalt to. I dette tilfellett er det to egenvektorer.

Egenrommene er utspent av de korresponderende egenvektorene

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

c) Determinanten er 20 og karakteristisk polynom er

$$(\lambda - 2)^2(\lambda - 5)$$

som gir egenverdier $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2$ og $\lambda_3 = 5$.

Egenrommene er utspent av de korresponderende egenvektorene

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

d) I denne oppgaven får vi en matrise på trappeform, og det er enkelt å lese ut resultatet. Determinanten er 27 og egenverdiene er $\lambda = 3$ med multiplisitet 3. I dette tilfellet får vi kun en egenvektor, nemlig:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

9.8. Hvis vi ganger sammen egenverdiene *med* multiplisitet får vi

$$\begin{aligned}(-2)i(-i) &= -2,\\ (-1)^2 2 &= 2,\\ 2^2 \cdot 5 &= 20,\\ 3^3 &= 27,\end{aligned}$$

altså nøyaktig determinantene til de respektive matrisene.

9.9. Vi fant egenverdiene og egenvektorene i oppgave 7.a. Hvis vi setter disse opp i matrisen P får vi

$$P = \begin{bmatrix} 0 & i & -i \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -i & 0 & 1 \\ i & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

som gir oss

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

som er en diagonalmatrise hvor elementene er egenverdiene til A.

9.10. Vi regner ut det karakteristiske polynomet som vanlig og får

$$\lambda^2 - 8\lambda = \lambda(\lambda - 8)$$

som betyr at egenverdiene er 0 og 8. Her kan vi observere at determinanten til matrisen er 0 siden den første raden er halvparten av den andre.

9.11. Vi antar at A har egenverdi λ. Dette betyr at det finnes en $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ slik at

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Multipliser begge sidene av ligningen med A for å få

$$A(A\mathbf{v}) = A(\lambda\mathbf{v}).$$

Vi kan flytte på paranteser, dra ut konstanter og bruke at $\mathbf{v}$ er en egenverdi til A for å se at

$$A^2\mathbf{v} = A(A\mathbf{v}) = A(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(A\mathbf{v}) = \lambda(\lambda\mathbf{v}) = \lambda^2\mathbf{v}.$$

Dette betyr at λ^2 er en egenverdi til matrisen A^2.

9.12. Vi setter som vanlig opp matrisen

$$T_\theta - \lambda I = \begin{bmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{bmatrix}$$

og beregner determinanten

$$\det(T_\theta - \lambda I) = \lambda^2 - 2\cos\theta + 1.$$

Ved nå å bruke abc-formelen får vi at

$$\lambda = \frac{2\cos\theta \pm 2\sqrt{\cos^2\theta - 1}}{2}$$

som blir

$$\lambda = \cos\theta \pm i\sin\theta$$

Hvis vi ser på denne komplekse egenverdien som en vektor i planet er det nøyaktig vektorene som peker i samme retning som $\mathbf{e}_1$ rotert med og mot klokken med θ radianer. Fra forrige øvinge vet vi at $T_{2\theta} = T_\theta \cdot T_\theta = T_\theta^2$. Fra oppgave 9.11 vet vi derfor at egenverdiene til $T_{2\theta}$ er λ^2:

$$\lambda^2 = (\cos\theta \pm i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta \pm \sin 2\theta.$$