Løsningsforslag øving 9

10.1.

a) Vi får at $\det(A-\lambda I) = \lambda^2 = 0$, og dermed at matrisen har egenverdien 0, med tilhørende egenvektor $\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$. Siden vi ikke har to lineært uavhengige egenvektorer er matrisen ikke diagonaliserbar.

b) Vi får at $\det(A-\lambda I) = (2-\lambda)^2(5-\lambda) = 0$, og dermed at matrisen har egenverdiene $2, 2$ og 5, med tilhørende egenrom henholdsvis

$$\mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\} \qquad \text{og} \qquad \mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}25\\15\\9\end{bmatrix}\right\}.$$

Siden vi ikke har tre lineært uavhengige egenvektorer er matrisen ikke diagonaliserbar.

c) Vi får at $\det(A-\lambda I) = (\lambda-3)(\lambda+i)(\lambda-i) = 0$, og dermed at matrisen har egenverdiene $3, -i$ og i, med tilhørende egenrom henholdsvis

$$\mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}, \qquad \mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}-i\\1\\0\end{bmatrix}\right\}, \qquad \mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}i\\1\\0\end{bmatrix}\right\}.$$

Matrisen har altså tre lineært uavhengige egenvektorer, så den er diagonaliserbar.

d) Vi får at $\det(A-\lambda I) = \lambda^2(1-\lambda) - (1-\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0$, og dermed at matrisen har egenverdiene $1, 1$ og -1, med tilhørende egenrom henholdsvis

$$\mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}, \qquad \mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\right\}.$$

Matrisen har altså tre lineært uavhengige egenvektorer, så den er diagonaliserbar.

e) Vi får at $\det(A-\lambda I) = \lambda(\lambda-3)(\lambda+i)(\lambda-i) = 0$, og dermed at matrisen har egenverdiene $0, 3, -i$ og i, med tilhørende egenrom henholdsvis

$$\mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}-6\\5\\0\\1\end{bmatrix}\right\}, \quad \mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}39\\113\\30\\40\end{bmatrix}\right\},$$

og

$$\mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}-i\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}, \quad \mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}i\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}.$$

Matrisen har altså fire lineært uavhengige egenvektorer, så den er diagonaliserbar.

f) Vi får at $\det(A-\lambda I) = \lambda^4 = 0$, og dermed at matrisen har egenverdien 0 av multiplisitet fire, med tilhørende egenrom henholdsvis

$$\mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\},$$

Siden vi ikke har fire lineært uavhengige egenvektorer er matrisen ikke diagonaliserbar.

g) Vi får at $\det(A-\lambda I) = \lambda(\lambda-1)^3 = 0$, og dermed at matrisen har egenverdier 0 og 1, sistnevnte med multiplisitet fire, med tilhørende egenrom henholdsvis

$$\mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}, \quad \mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\},$$

Siden vi ikke har fire lineært uavhengige egenvektorer er matrisen ikke diagonaliserbar.

h) Vi får at $\det(A-\lambda I) = (\lambda-1)^4 = 0$, og dermed at matrisen har egenverdien 1, av multiplisitet fire, med tilhørende egenrom henholdsvis

$$\mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\},$$

Siden vi ikke har fire lineært uavhengige egenvektorer er matrisen ikke diagonaliserbar.

10.2.

a) Vi vet fra forelesningen om diagonalisering at egenveridiene til A er 3 og -5 med egenvektorer henholdsvis $\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$. Altså får vi matriser

$$D = \begin{bmatrix}3 & 0\\0 & -5\end{bmatrix} \text{ og } P = \begin{bmatrix}3 & 1\\2 & -2\end{bmatrix}$$

med

$$P^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}2 & 1\\2 & -3\end{bmatrix}.$$

Da får vi

$$\begin{aligned} A^k &= \begin{bmatrix}3 & 1\\2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3^k & 0\\0 & (-5)^k\end{bmatrix}\frac{1}{8}\begin{bmatrix}2 & 1\\2 & -3\end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{8}\begin{bmatrix}6\cdot 3^k + 2\cdot(-5)^k & 3\cdot 3^k - 3(-5)^k\\ 4\cdot 3^k - 4\cdot(-5)^k & 2\cdot 3^k + 6\cdot(-5)^k\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

b) Vi starter med å finne en diagonalisering $A = PDP^{-1}$ av A. Siden A er øvre triangulær, er egenverdiene til A bare tallene på diagonalen: 2, 3 og 5.

Vi lager matrisen V ved å sette sammen egenvektorer som hører til de tre egenverdiene, og vi lager matrisen D ved å sette egenverdiene på diagonalen:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 25 \\ 0 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$
$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Da får vi (ved å regne ut inversen på vanlig måte) at

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 10/3 \\ 0 & 1 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix}$$

Dermed har vi diagonalisert matrisen A.

Legg merke til at når $A = VDV^{-1}$, så har vi

$$\begin{aligned} A^2 &= (VDV^{-1})(VDV^{-1}) = VD(V^{-1}V)DV^{-1} \\ &= VD^2V^{-1}, \\ A^3 &= (VD^2V^{-1})(VDV^{-1}) = VD^2(V^{-1}V)DV^{-1} \\ &= VD^3V^{-1}, \end{aligned}$$

og så videre. Generelt:

$$A^n = VD^nV^{-1}$$

Det betyr at i vårt tilfelle kan vi beregne A^{10} slik:

$$\begin{aligned} A^{10} &= VD^{10}V^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 25 \\ 0 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 10/3 \\ 0 & 1 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1024 & 174075 & 40250650 \\ 0 & 59049 & 24266440 \\ 0 & 0 & 9765625 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

10.3.

a) Det karakteristiske polynomet er

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3-i \\ 3+i & 4-\lambda \end{vmatrix} &= (2-\lambda)(4-\lambda) - (3-i)(3+i) \\ &= \lambda^2 - 6\lambda - 2, \end{aligned}$$

og egenverdiene er $3+\sqrt{11}$ og $3-\sqrt{11}$.

Det følger at

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3-i \\ 1+\sqrt{11} \end{bmatrix}$$

er en egenvektor for egenverdien $3+\sqrt{11}$, og at

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3-i \\ 1-\sqrt{11} \end{bmatrix}$$

er en egenvektor for egenverdien $3-\sqrt{11}$. Da kan vi sette

$$V = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} 3+\sqrt{11} & 0 \\ 0 & 3-\sqrt{11} \end{bmatrix}$$

b) Det karakteristiske polynomet er

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 6-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 13\lambda^2 - 36\lambda$$

Egenverdiene er 0, 4 og 9. Vi finner tilhørende egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Da kan vi sette

$$V = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

c) Vi vet fra oppgave 1d at egenverdiene er 1, 1 og -1 med tilhørende egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Da kan vi sette

$$V = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

d) Vi vet fra oppgave 1c at egenverdiene er 3, $-i$ og i med tilhørende egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Da kan vi sette

$$V = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$$

10.4.

a) Det følger at matrisen A, med hensyn på basisen $(1, x, x^2)$, er:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Legg merke til at vektorene vi får som input er på formen $\begin{bmatrix} c & b & a \end{bmatrix}^T$ med hensyn til denne basisen.

b) Matrisen A er ikke diagonaliserbar: Vi ser at $\lambda = 0$ er eneste egenverdien (triangulær matrise). Men det er kun konstante polynom som er egenvektorer til 0 (den deriverte av en konstant er lik null). Med andre ord, egenrommet til null er endimensjonalt, og vi trenger tre lineært uavhengige egenvektorer for å kunne diagonalisere A.

10.5. Vi får at ligningen $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ for lineærtransformasjonen er:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 3x_3 \end{bmatrix}$$

Vi vet fra oppgave 1c og 3d at denne matrisen er diagonaliserbar.