Løsningsforslag øving 10

11.1. For å finne ut om en matrise P representerer en projeksjon, må vi sjekke om $P^2 = P$.

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Projeksjon.

b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Projeksjon.

c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Projeksjon.

d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Ikke projeksjon.

e) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Ikke projeksjon.

f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Projeksjon.

11.2.

a) Skalarproduktet av de to vektorene er:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot 1 + (-5) \cdot 2 + 1 \cdot 0 = -8$$

Vektorene er ikke ortogonale.

b) Vi ser på skalarproduktet til hvert par av vektorer:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Alle de tre vektorene er ortogonale til hverandre.

c) Vi ser på indreproduktet av hvert par av vektorer. Merk at vi nå betrakter vektorer med komplekse verdier, dermed må vi beregne det komplekse indreproduktet, hvor den første vektoren kompleksonjugeres.

$$\begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$\begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix} = 0$$

Vektorene $(i, 0, 1)$ og $(i, 1, 0)$ er altså ikke ortogonale, men vektoren $(1, i, i)$ er ortogonal til hver av de to andre.

11.3. Vi vet at $P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \mathbf{u}$. Husk at vi allerede har beregenet indreproduktet mellom alle $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i oppgave 2. Vi må fremdeles regne ut $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$.

a)

$$P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \mathbf{u} = \frac{-8}{2^2 + (-5)^2 + 1^2} \mathbf{u} = \frac{-4}{15} \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

og

$$\mathbf{v} - P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{4}{15} \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 23 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

b) Her vet vi at vektorene er ortogonale, så da får vi uten videre at $P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ og $\mathbf{v} - P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$.

c)

$$P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{u} * \mathbf{v}}{\mathbf{u} * \mathbf{u}} \mathbf{u} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

og

$$\mathbf{v} - P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

d) Vi vet fra teorem 11.11 at $P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$ og $\mathbf{v} - P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$ er ortogonale,så indreproduktet mellom de to vektorene vil i alle tilfellene bli 0.

11.4. Den adjungerte matrisen er en matrise som er transponert og kompleksonjugert.

$$\begin{bmatrix} 1-i & 2 & 2+i \\ 1+i & i & 1-i \end{bmatrix}$$

11.5. Vi kan sjekke at vektorene

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er lineært uavhengige på vanlig måte (kombiner dem til en matrise, gausseliminer og sjekk at det blir pivotelementer i alle kolonner). Det betyr at de utgjør en basis for $\mathbb{R}^3$. Videre sjekker vi at de er en ortogonal basis ved å sjekke at hver av dem er ortogonal til begge de andre. Det er de.

Når vi vet at vi har en ortogonal basis, kan vi finne koordinatene til en vektor med hensyn på basisen ved å projisere vektoren ortogonalt på hver basisvektor:

$$P_{\mathbf{b}_1}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\mathbf{b}_1$$
$$P_{\mathbf{b}_2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \frac{2}{3}\mathbf{b}_2$$
$$P_{\mathbf{b}_3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = 0\mathbf{b}_3$$

Koeffisientene til vektoren $(1,1,1)$ med hensyn på basisen $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ er altså $(1/3, 2/3, 0)$.

11.6. Vi bruker indreproduktet definert i teorem 11.12. Vi beregner vinkelen som definert i teorem 11.9.

a) Det følger at

$$\langle -x, e^x\rangle = -\int_0^1 xe^x dx = -1 \neq 0.$$

Indreproduktet er lik -1, og funksjonene er dermed ikke ortogonale.

Vi får at lengdene er

$$\| -x\| = \sqrt{\langle -x, -x\rangle} = \sqrt{\int_0^1 x^2 dx} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

og

$$\|e^x\| = \sqrt{\langle e^x, e^x\rangle} = \sqrt{\int_0^1 e^{2x} dx} = \sqrt{\frac{1}{2}(e^2-1)}.$$

Det følger at vinkelen er

$$\begin{aligned}\Theta &= \cos^{-1}(\frac{\langle -x, e^x\rangle}{\| -x\|\|e^x\|})\\ &= \cos^{-1}(-\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}(e^2-1)}})\\ &= 165.7^\circ\end{aligned}$$

Vi konkluderer at funksjonene er nesten parallelle, men går i motsatt retning av hverandre. Husk at $\Theta \approx 0$ betyr at de er ca parallelle, $\Theta \approx 90$ betyr at de er ca ortogonale og $\Theta \approx 180$ parallelle i motsatte retninger.

b) Det følger at

$$\langle x^3 - \frac{1}{3}x, x - \sin x\rangle = \int_0^1 (x^3 - \frac{1}{3}x)(x-\sin x)dx = 0.012.$$

Indreproduktet er ulik 0, og funksjonene er dermed ikke ortogonale.

Vi får at lengdene er

$$\begin{aligned}\|x^3 - \frac{1}{3}x\| &= \sqrt{\langle x^3 - \frac{1}{3}x, x^3 - \frac{1}{3}x\rangle}\\ &= \sqrt{\int_0^1 (x^3 - \frac{1}{3}x)^2 dx}\\ &\approx 0.216\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}\|x - \sin x\| &= \sqrt{\langle x - \sin x, x - \sin x\rangle}\\ &= \int_0^1 (x - \sin x)^2 dx\\ &\approx 0.061.\end{aligned}$$

Det følger at vinkelen er

$$\begin{aligned}\Theta &= \cos^{-1}(\frac{\langle x^3 - \frac{1}{3}x, x - \sin x\rangle}{\|x^3 - \frac{1}{3}x\|\|x - \sin x\|})\\ &= \cos^{-1}(\frac{0.012}{0.216 \cdot 0.061})\\ &= \cos^{-1}(0.91)\\ &= 24.49^\circ.\end{aligned}$$

Vi konkluderer at funksjonene er nesten parallelle.

c) Det følger at $\langle x, x^2 - \frac{3}{4}x\rangle = \int_0^1 x(x^2 - \frac{3}{4}x)dx = 0.$ Indreproduktet er lik 0, og funksjonene er dermed ortogonale. Det følger også at vinkelen $\Theta = 90^\circ$.

11.7. Det ortogonale komplementet til dette underrommet er alle vektorer som er ortogonale på de to vektorene. Det vil si, alle vektorer slik at prikkproduktet med de to gitte vektorene blir 0. Ettersom vi er gitt to vektorer i $\mathbb{R}^3$ så kan komplementet spennes ut av en vektor. Vi kan enkelt prøve oss frem for å finne en slik vektor på formen $\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} = a + c = 0.$$

og

$$\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} = -a + 2c = 0.$$

Her ser vi fra første ligning at $a = c$. Men i andre ligning ser vi at $a = 2c$. Den eneste løsningen på de to ligningene er at $a = c = 0$. Derimot kan b være hva som helst. Det ortogonale komplementet er dermed et underrom som spennens ut av vektoren $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$.

11.8.

a) Vi bruker Gram–Schmidt-ortogonalisering, og får:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - P_{\mathbf{u}_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23/15 \\ 2/3 \\ 4/15 \end{bmatrix}$$

Da er $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ en ortogonal basis. Vi finner en ortonormal basis ved å dele hver basisvektor på lengden sin:

$$\hat{\mathbf{u}}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_1\|}\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{30}}\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{30} \\ -5/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{30} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{u}}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_2\|}\mathbf{u}_2 = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{43}}\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 23\sqrt{15}/15\sqrt{43} \\ 2\sqrt{15}/3\sqrt{43} \\ 4\sqrt{15}/15\sqrt{43} \end{bmatrix}$$

Da er $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2)$ en ortonormal basis. Merk at flere av utreningene her ble gjort i oppgave 2 og 3.

b) Vi har fra oppgave 2 at vektorene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

allerede er ortogonale, så det eneste som gjenstår er å normalisere dem. Vi deler hver vektor på lengden sin og får:

$$\hat{\mathbf{u}}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{u}}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{u}}_3 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Da er $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2, \hat{\mathbf{u}}_3)$ en ortonormal basis.

c) Vi husker at vi så de samme vektorene i oppgave 2. Da fant vi ut at vektoren $(1, i, i)$ er ortogonal til hver av de to andre. Det betyr at vi kan starte med å sette:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da er $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$ ortogonale til hverandre, og vi må bare gjøre $(i, 0, 1)$ ortogonal til begge disse. Vi setter:

$$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - P_{\mathbf{u}_1} \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - P_{\mathbf{u}_2} \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Da er $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ en ortogonal basis. Vi normaliserer:

$$\hat{\mathbf{u}}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ i/\sqrt{3} \\ i/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{u}}_2 = \begin{bmatrix} i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{u}}_3 = \begin{bmatrix} i/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Da er $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2, \hat{\mathbf{u}}_3)$ en ortonormal basis.

11.9. Vi bruker den ortogonale basisen $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ som vi fant i oppgave 8, og projiserer vektoren $(i, 2+i, 1)$ ned på hver basisvektor. Da får vi følgende vektor:

$$\begin{aligned}
P_{\mathbf{U}} \begin{bmatrix} i \\ 2+i \\ 1 \end{bmatrix} &= P_{\mathbf{u}_1} \begin{bmatrix} i \\ 2+i \\ 1 \end{bmatrix} + P_{\mathbf{u}_2} \begin{bmatrix} i \\ 2+i \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -3/5 - i/5 \\ 3/2 + i/2 \\ -3/10 - i/10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 184/215 + 253i/215 \\ 16/43 + 22i/43 \\ 32/215 + 44i/215 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 11/43 + 42i/43 \\ 161/86 + 87i/86 \\ -13/86 + 9/86 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

11.10.

a) Den ortogonale projeksjonen er:

$$P_{\mathbf{v}}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

b) Kolonnene til standardmatrisen $[P_{\mathbf{v}}]$ består av prosjeksjonen til standardbasisen i $\mathbb{R}^3$. Vi regner ut:

$$P_{\mathbf{v}}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{2}{14}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

og

$$P_{\mathbf{v}}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{3}{14}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Da får vi at:

$$[P_{\mathbf{v}}] = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

c) Matrisen er ikke injektiv fordi alle vektorer som står ortogonalt på $\mathbf{v}$ vil sendes til nullvektoren, og dermed består nullrommet til $[P_{\mathbf{v}}]$ av mer enn bare nullvektoren selv.

Matrisen er ikke surjektiv fordi den kun spenner ut linjen som spennes ut av vektoren $\mathbf{v}$ selv.

d) Fra oppgave c så vet vi at $\operatorname{im} P_{\mathbf{v}} = \operatorname{Sp} \mathbf{v}$. Denne har dimensjon lik 1. Vi vet at $\operatorname{im} P_{\mathbf{v}} = \operatorname{Col}[P_{\mathbf{v}}]$ fordi $[P_{\mathbf{v}}]$ er standardmatrisen til $P_{\mathbf{v}}$. Der har dermed begge dimensjon lik 1.

Fra teorem 7.27 får vi at $\dim \ker P_{\mathbf{v}} + \dim \operatorname{Col}[P_{\mathbf{v}}] = 3$, så da følger det at $\dim \ker P_{\mathbf{v}} = 2$. Da får vi også at $\dim \operatorname{Null}[P_{\mathbf{v}}] = 2$ fordi $[P_{\mathbf{v}}]$ er standardmatrisen til $P_{\mathbf{v}}$.

11.11.

a) Ved å regne ut på samme måte som tidligere i denne øvingen så får vi følgende lengder:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\int_0^1 x^2 dx} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\|x^2\| = \sqrt{\langle x^2, x^2\rangle} = \sqrt{\int_0^1 x^4 dx} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\|x^3\| = \sqrt{\langle x^3, x^3\rangle} = \sqrt{\int_0^1 x^6 dx} = \frac{1}{\sqrt{7}},$$

$$\|x^4\| = \sqrt{\langle x^4, x^4\rangle} = \sqrt{\int_0^1 x^8 dx} = \frac{1}{\sqrt{9}},$$

$$\|x^5\| = \sqrt{\langle x^5, x^5\rangle} = \sqrt{\int_0^1 x^{10} dx} = \frac{1}{\sqrt{11}}.$$

b) Generelt får vi:

$$\|x^n\| = \sqrt{\langle x^n, x^n\rangle} = \sqrt{\int_0^1 x^{2n} dx} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Vi ser dermed at når $n \to \infty$ så $\|x^n\| = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \to 0$.

c) Følgende figur illustrerer grafen til x^n når n vokser. Arealet under grafen minsker, og dermed minsker også lengden til x^n.