Løsningsforslag øving 11

12.1.

a) La

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix}$$

være koeffisientmatrisen og høyresiden i likningssystemet vårt. Vi ganger hver av disse med den adjungerte av A på venstre side, og får:

$$A^*A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^*\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Vi må løse likningssystemet

$$A^*A\mathbf{x} = A^*\mathbf{b}.$$

Dette systemet har følgende totalmatrise:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 17 & 1 & 19 \\ 1 & 5 & 11 \end{array}\right]$$

Når vi gausseliminerer denne, får vi:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Minste kvadraters metode gir altså løsningen

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

b) La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

være koeffisientmatrisen og høyresiden. Vi får:

$$A^*A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^*\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Minste kvadraters metode gir løsningene

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Merk at i denne oppgaven så er løsningen en linje. I høyere dimensjoner er det altså mulig at det er mange løsninger som gir en like god tilnærming for et ligningssystem.

c) La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}$$

være koeffisientmatrisen og høyresiden. Vi får:

$$\begin{aligned} A^*A &= \begin{bmatrix} 1 & -i & 1 \\ -i & 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -i \\ -i & 3 \end{bmatrix} \\ A^*\mathbf{b} &= \begin{bmatrix} 1 & -i & 1 \\ -i & 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 \\ i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Minste kvadraters metode gir løsningen

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dette kan egentlig sees ved at første kolonne i matrisen A er identisk med vektoren $\mathbf{b}$.

12.2.

a) Vi bruker minste kvadraters metode på likningssystemet

$$\begin{cases} d = 1 \\ a + b + c + d = 2 \\ 8a + 4b + 2c + d = 9 \\ 27a + 9b + 3c + d = 28 \\ 64a + 16b + 4c + d = 65 \end{cases}$$

og får løsningen

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Polynomet som passer best til punktene er altså:

$$p(x) = x^3 + 1$$

b) Polynomet p som vi fant i del a) passer faktisk eksakt til punktene.

12.3. Vi skal altså finne a og b som best mulig løser systemet

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \\ 7 & 1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Vi multipliserer med A^* til venstre på begge sider av ligningen. Da får vi at $A^*A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = A^*\mathbf{b}$ er:

$$\begin{bmatrix} 142 & 22 \\ 22 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57 \\ 9 \end{bmatrix},$$

som har løsningen

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/14 \\ 2/7 \end{bmatrix}.$$

Linjen som passer best til punktene er altså:

$$y = \frac{5}{14}x + \frac{2}{7}.$$

12.4. I denne oppgaven finner vi egenverdiene og egenvektorene på vanlig måte. Vi vet at slike matriser alltid har en egenverdi lik 1. Da er den tilhørende egenvektoren, etter at den er normalisert slik at koordinatene summerer til 1, en likevektsvektor for systemet.

a) Her finner vi at $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor tilhørende egenverdien 1. Denne vektoren summerer til 7/4, som vi dermed må dele på for å få summen til å bli 1. Da er $\bar{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 3/7 \\ 4/7 \end{bmatrix}$ en likevektsvektor for systemet. Vi kan enkelt multiplisere ut og se at $A\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}$.

b) Her finner vi at $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5/9 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor tilhørende egenverdien 1. Denne vektoren summerer til 14/9, som vi dermed må dele på for å få summen til å bli 1. Da er $\bar{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 5/14 \\ 9/14 \end{bmatrix}$ en likevektsvektor for systemet. Vi kan multiplisere ut og se at $B\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}$.

c) Her finner vi at $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/5 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor tilhørende egenverdien 1. Denne vektoren summerer til 27/10, som vi dermed må dele på for å få summen til å bli 1. Da er $\bar{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 30/54 \\ 10/135 \\ 10/27 \end{bmatrix}$ en likevektsvektor for systemet. Vi kan multiplisere ut og se at $C\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}$.

12.5.

a) Følgende matrise er en stokastisk matrise som beskriver systemet.

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.15 & 0.1 \\ 0.15 & 0.8 & 0.1 \\ 0.05 & 0.05 & 0.8 \end{bmatrix}$$

b) Her finner vi at $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor tilhørende egenverdien 1. Denne vektoren summerer til 5, som vi dermed må dele på for å få summen til å bli 1. Da er $\bar{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 2/5 \\ 2/5 \\ 1/5 \end{bmatrix}$ en likevektsvektor for systemet. Vi kan enkelt multiplisere ut og se at $A\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}$. Dette er fordelingen av gassene som systemet konvergerer mot.

Ettersom alle elementene i A er større enn 0 så er A en regulær matrise. Da vet vi fra teorem 12.10 at systemet konvergerer for enhver startvektor. Dermed spiller ikke startfordelingen noen rolle i dette tilfellet.

12.6.

a) Vi vet at en sannsynlighetsvektor er en vektor $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$ der alle koordinatene er større eller lik 0 og summen av koordinatene er lik 1. Produktet $S\mathbf{x}$ er det samme som summen av alle koordinatene i $\mathbf{x}$. Dersom alle koordinatene er ikke-negative og $S\mathbf{x} = 1$, så er $\mathbf{x}$ per definisjon en sannsynlighetsvektor. Motsatt vei: dersom $\mathbf{x}$ er en sannsynlighetsvektor så vil nødvendigvis alle koordinatene være ikke-negative, og produktet med S vil gi oss tallet 1.

b) En $n \times n$ matrise P kalles stokastisk matrise hvis kolonnene i P er sannsynlighetsvektorer, det vil si at elementene er ikke-negative og kolonnesummene er lik 1. Produktet SP er vektoren hvor hver koordinat i produktet er vektorproduktet mellom S og hver kolonne i P. Vi vet at hver kolonne i er en sannsynlighetsvektor, så det følger fra forrige deloppgave at hver av de summerer til 1. Da følger det at hver koordinat i SP er 1, og altså at $SP = S$.

c) Produktet $P\mathbf{x}$ er en vektor hvor hver koordinat er vektorproduktet av radene i P og $\mathbf{x}$. Vi vet at alle elementer i P og alle koordinater i $\mathbf{x}$ er ikke-negative, så må dermed hver koordinat i produktet $P\mathbf{x}$ være ikke-negative. I tillegg ser vi at for hver koordinat i $\mathbf{x}$ så multipliserer vi med ett og ett element i kolonnene til P. Dersom vi summerer alle koordinatene i $P\mathbf{x}$ så får vi da $x_1(a_{1,1} + a_{1,2} + ... + a_{1,n}) + x_2(a_{2,1} + a_{2,2} + ... + a_{2,n}) + ... + x_n(a_{n,1} + a_{n,2} + ... + a_{n,n}) = x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$. Det følger at $P\mathbf{x}$ også er en sannsynlighetsvektor.