Løsningsforslag øving 12

13.1. I dette kurset ser vi på to tilfeller; enten hvor vi har to reelle men ulike egenverdier $\lambda_1 \neq \lambda_2$, eller hvor vi har to komplekse egenverdier $\lambda = \alpha \pm \beta i$. I reelle tilfellet får vi en løsning på formen $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$, mens i det komplekse tilfellet får vi en løsning på formen $y(t) = e^{\alpha t}($ en lineærkombinasjon av $\cos(\beta t)$ og $\sin(\beta t)$).

I det reelle tilfellet er det tre ulike situasjoner. Dersom $\lambda > 0$ så vil løsningene til systemet ligge langs den tilhørende egenvektoren, men begeve seg bort fra origo. Dersom $\lambda = 0$ så vil løsningene til systemet ligge i ro på den tilhørende egenvektoren. Dersom $\lambda < 0$ så vil løsningene til systemet ligge langs den tilhørende egenvektoren, men begeve seg mot origo.

Anta først at vi har $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. Da får vi løsninger som ligger langs de tilhørende egenvektorene $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$, men for store verdier av t så vil $\mathbf{v}_1$ dominere. Derfor får vi en ustabil likevektsløsning ut i fra origo med hovedvekt i samme retning som $\mathbf{v}_1$. Se figur i eksempel 13.27 i notatene for et generelt eksempel. For $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ får vi noe tilsvarende, men denne gangen får vi en ustabil likevektsløsning mot origo med hovedvekt i samme retning som $\mathbf{v}_1$. Dersom vi har $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ så vil $\mathbf{v}_1$ dominere når $-\inf < t < 0$ og $\mathbf{v}_2$ dominere når $0 < t < \inf$. Dette gjør at vi får en sadel om origo. Se figur i eksempel 13.19 i notatene. Alt dette skjer fordi (generelt) $e^{\lambda t}$ er det dominerende leddet i løsningen.

I det komplekse tilfellet vil $e^{\lambda t}$ leddet sørge for skalering, mens $\cos(\beta t)$ og $\sin(\beta t)$ sørge for rotasjon. Følgelig får vi for $\alpha = 0$ et sirkulært fasediagram, for $\alpha > 0$ får vi en spiral ut ifra origo og for $\alpha < 0$ får vi en spiral inn mot origo. Se figur i eksempel 13.28 i notatene for spiraler som er sirkulære og utgående fra origo, og se figur i eksempel 13.25 i notatene for sirkulære baner om origo. For å finne orienteringen til spiralene eller sirkelene så kan vi for eksempel beregne $A\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ (for matrisen A som representerer differentialligningen) og se hvilken vei resultatet går. Dette blir da orienteringen til fasediagrammet.

a) Egenverdiene er 3 og -1, derfor får vi en sadel om origo. Se figur i eksempel 13.19 i notatene.

b) Egenverdiene er $-1+i\sqrt{2}$ og $-1-i\sqrt{2}$, derfor får vi spiraler som er sirkulære og inngående mot origo. Se figur i eksempel 13.28 i notatene. Vi har at

$$A = \begin{bmatrix}1 & -2\\3 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}.$$

Da følger det at spiralen går mot klokka.

c) Egenverdiene er $1+\sqrt{2}$ og $1-\sqrt{2}$, derfor får vi en sadel om origo. Se figur i eksempel 13.19 i notatene.

d) Egenverdiene er $-1+2i$ og $-1-2i$, derfor får vi spiraler som er sirkulære og inngående mot origo. Se figur i eksempel 13.28 i notatene. Vi har at

$$A = \begin{bmatrix}-7 & 10\\-4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-7\\-4\end{bmatrix}.$$

Da følger det at spiralen går med klokka.

13.2.

a) Egenverdier $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 2$. Da får vi egenvektorene $\begin{bmatrix}7\\-2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$. Dette gir oss den generelle løsningen:

$$\mathbf{y}(t) = c_1\begin{bmatrix}7\\-2\\3\end{bmatrix}e^{4t} + c_2\begin{bmatrix}3\\-1\\1\end{bmatrix}e^{3t} + c_3\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}e^{2t}.$$

b) Egenverdier $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$. Da får vi egenvektorene $\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-6\\1\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-4\\1\\4\end{bmatrix}$. Dette gir oss den generelle løsningen:

$$\mathbf{y}(t) = c_1\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}e^{-2t} + c_2\begin{bmatrix}-6\\1\\5\end{bmatrix}e^{-t} + c_3\begin{bmatrix}-4\\1\\4\end{bmatrix}e^{t}.$$

13.3.

a) Vi har fra tidligere at

$$\mathbf{y}(t) = c_1\begin{bmatrix}7\\-2\\3\end{bmatrix}e^{4t} + c_2\begin{bmatrix}3\\-1\\1\end{bmatrix}e^{3t} + c_3\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}e^{2t}.$$

Gitt initialverdiene så får vi systemet

$$\mathbf{y}(0) = c_1\begin{bmatrix}7\\-2\\3\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}3\\-1\\1\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Dette kan skrives opp som et vanlig ligningssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hvor systemets egenvektorer utgjør kolonnene i A, de ukjente konstantene c_1, c_2, c_3 utgjør den ukjente vektoren $\mathbf{x}$ og $\mathbf{b} = \mathbf{y}(0)$. Et slikt system vet vi hvordan vi løser, og svaret er $c_1 = 5/4, c_2 = -1/6, c_3 = 5/12$.

b) Vi har fra tidligere at

$$\mathbf{y}(t) = c_1\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}e^{-2t} + c_2\begin{bmatrix}-6\\1\\5\end{bmatrix}e^{-t} + c_3\begin{bmatrix}-4\\1\\4\end{bmatrix}e^{t}.$$

Gitt initialverdiene så får vi systemet

$$\mathbf{y}(0) = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi gjør tilsvarende som i forrige oppgave, og svaret er $c_1 = -25/2, c_2 = 3, c_3 = 21/2$.

13.4. Gjør tilsvarende som i eksempel 13.19; tegn kurver i samme retning som pilene i figuren. I dette tilfellet går de inn mot origo.

14.1. La $v = y'$.

a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}'$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}'$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}'$

14.2.

a) Vi setter opp systemet på samme måte som i forrige oppgave:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}'.$$

Denne matrisen gir oss egenverdier $\lambda_1 = 2$ og $\lambda_2 = -1$. Det følger at den generelle løsningen er $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}$.

b) Vi setter opp systemet på samme måte som i forrige oppgave:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}'.$$

Denne matrisen gir oss egenverdier $\lambda_1 = i$ og $\lambda_2 = -i$. Det følger at den generelle løsningen er $y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$. (Se teorem 13.24 og eksempel 13.25 i notatene.)

14.3.

a) Fra forrige oppgave har vi den generelle løsningen $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}$. Dette gir oss at $y(0) = c_1 + c_2 = 0$, og dermed at $c_1 = -c_2$. Vi deriverer den generelle løsningen og får at $y'(t) = 2c_1 e^{2t} - c_2 e^{-t}$. Dette gir oss at $y'(0) = 2c_1 - c_2 = 1$. Vi kombinerer de to resultatene og får at $2c_1 + c_1 = 1$ som igjen gir oss at $c_1 = 1/3$. Da følger det også at $c_2 = -1/3$. Den endelige løsningen er $y(t) = \frac{1}{3}(e^{2t} - e^{-t})$.

b) Fra forrige oppgave har vi den generelle løsningen $y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$. Dette gir oss at $y(\pi/2) = c_2 = 1$. Vi deriverer den generelle løsningen og får at $y'(t) = -c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t)$. Dette gir oss at $y'(\pi/2) = -c_1 = 0$. Vi kombinerer de to resultatene og får at den endelige løsningen er $y = \sin(t)$.

14.4.

a) Fra tidligere oppgave har vi den generelle løsningen $y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$. Vi bruker cosinus-setningen

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta),$$

og får at:

$$\cos(t + 2) = \cos(t)\cos(2) - \sin(t)\sin(2).$$

Vi ser at denne løsningen er på riktig form, og konkluderer at $\cos(t + 2)$ ligger i løsningsrommet.

b) Fra forrige deloppgave fikk vi at

$$\cos(t + 2) = \cos(t)\cos(2) - \sin(t)\sin(2).$$

Dersom vi setter $c_1 = \cos(2)$ og $c_2 = -\sin(2)$, så får vi koordinatene til $\cos(t + 2)$ med hensyn på basisen til løsningsrommet.