

Øving 4

Oppgaver til kapittel 4

1. La A og B være matriser, og \mathbf{v} en vektor:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ -8 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Regn ut (eller forklar hvorfor uttrykkene ikke gir mening):

- a) AB d) B^2 g) $BA\mathbf{v}$
b) BA e) $A+B$ h) B^\top
c) A^2 f) $(A+I_3)\mathbf{v}$ i) $\mathbf{v}^\top \mathbf{v}$

2. Løs likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ der

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. Finn en kvadratisk matrise A slik at:

- a) $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ og $A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$
b) $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$ og $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$
c) $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 99 \\ -1 \\ 145 \end{bmatrix}$ og $A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$
d) $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ og $A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

4. La A være følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kan du finne et tall c og en vektor \mathbf{v} (som ikke skal være nullvektoren) slik at $A\mathbf{v} = c\mathbf{v}$? I så fall, for hvilke valg av c eksisterer en slik ikke-null vektor? Kan du gi en geometrisk forklaring på hva som skjer når du multipliserer A med vektorene i de ulike tilfellene for c ?

5. La A , \mathbf{e}_1 og \mathbf{e}_2 være gitt ved:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Skisser $A\mathbf{e}_1$ og $A\mathbf{e}_2$ i planet. Hva har skjedd med \mathbf{e}_1 og \mathbf{e}_2 geometrisk når de er blitt ganget med A ?

b) Hva skjer – geometrisk – med en vilkårlig vektor i \mathbb{R}^2 når vi multipliserer med A ?

c) Kan du gi en geometrisk forklaring på hvorfor A burde være inverterbar? Har du et forslag til hvordan multiplikasjon med A^{-1} burde endre en vilkårlig vektor (geometrisk)?

d) Finn den inverse matrisen til A , og sammenlign med svaret ditt i del c).

6.

a) La

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

være to vektorer i \mathbb{R}^n . Vis at prikkproduktet mellom \mathbf{v} og \mathbf{w} ,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n,$$

er det samme som matriseproduktet $\mathbf{v}^\top \mathbf{w}$.

b) La $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_n]$ være en $n \times n$ -matrise slik at $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i = 1$ for alle i , og $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = 0$ for $i \neq j$. Vis at $A^{-1} = A^\top$.

Hint: Hva er radene i matrisen A^\top ?

c) Sjekk at matrisen

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

oppfyller antagelsene i del b), og bruk dette til å bestemme A^{-1} . Sjekk at svaret ditt er riktig.

d) Gang vektorene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

inn i matrisen A over. Ser du noe artig?