Øving 6

Oppgaver til kapittel 7

1. Svar med begrunnelse på følgende spørsmål:

a) Er mengden

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 | a \geq 0, b \geq 0 \right\}$$

et underrom av $\mathbb{R}^2$?

b) Er mengden av alle løsninger (x, y, z) i $\mathbb{C}^3$ av ligningen

$$x - y + z = 0$$

et underrom av $\mathbb{C}^3$?

c) Er mengden av alle løsninger (x, y, z) i $\mathbb{C}^3$ av ligningen

$$x - y + z = 1$$

et underrom av $\mathbb{C}^3$?

d) Er mengden

$$L = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2 | a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

et *komplekst* underrom av $\mathbb{C}^2$?

e) Hvis vi oppfatter $\mathbb{C}^2$ som et reelt vektorrom. Er mengden

$$L = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2 | a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

et *reelt* underrom av $\mathbb{C}^2$?

3) hvis $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ er en vektor i L, dvs. a og b er reelle, og k er en reell skalar; et reelt tall. Så er $k \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka \\ kb \end{bmatrix}$ i L siden ka og kb er relle tall.

2. La V være et vektorrom, og la U_1 og U_2 være to underrom av V. Hvilke av følgende påstander kan vi da konkludere med?

a) Snittet $U_1 \cap U_2$ er et underrom av V.

b) Unionen $U_1 \cup U_2$ er et underrom av V.

3.

a) Finn en basis for vektorrommet $\mathcal{M}_{m \times n}$. Hva er dimensjonen?

b) Se på følgende delmengder av $\mathcal{M}_n$:

$$\begin{aligned} U&: \text{alle diagonalmatriser} \\ V&: \text{alle inverterbare matriser} \\ W&: \text{alle matriser } A \text{ slik at } A = A^\top \end{aligned}$$

Hvilke av disse mengdene er underrom av $\mathcal{M}_n$?

c) For de mengdene i del **b)** som er underrom, hva er dimensjonen?

4.

a) Forklar hvilke av vektorrommene

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}_n \quad \text{(for forskjellige } n) \\ &\mathcal{P} \\ &\mathcal{C}(\mathbb{R}) \\ &\mathcal{C}^n(\mathbb{R}) \quad \text{(for forskjellige } n) \\ &\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

som er underrom av hverandre.

b) Hvilke av vektorrommene i **a)** er endeligdimensjonale? Hvilke er uendeligdimensjonale?

5. La

$$V = \left\{ \boxed{r} \;\middle|\; r \in \mathbb{R} \text{ og } r > 0 \right\}$$

være mengden der hvert element er en boks som inneholder et positivt reelt tall, slik at for eksempel

$$\boxed{5}, \quad \boxed{\tfrac{3}{4}}, \quad \boxed{\pi} \quad \text{og} \quad \boxed{9328}$$

er elementer i V. Definer vektoraddisjon og skalarmultiplikasjon for V slik:

$$\begin{aligned} \boxed{r} + \boxed{s} &= \boxed{rs} \\ c \cdot \boxed{r} &= \boxed{r^c} \end{aligned}$$

Er V et vektorrom?

6. Vi skriver

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

for mengden av heltall.

a) Hvis vi tenker på elementene i vektorrommet $\mathbb{R}^1$ som bare tall, kan vi se på $\mathbb{Z}$ som en delmengde av $\mathbb{R}^1$. Er $\mathbb{Z}$ et underrom av $\mathbb{R}^1$?

b) Nå prøver vi å gjøre $\mathbb{Z}$ til et vektorrom ved å definere vektoraddisjon og skalarmultiplikasjon direkte. Definer vektoraddisjon som vanlig addisjon av tall, og definer skalarmultiplikasjon av et reelt tall r og et heltall n ved

$$r * n = \lfloor rn \rfloor,$$

der uttrykket $\lfloor rn \rfloor$ betyr tallet rn rundet ned til et heltall. (Vi bruker symbolet $*$ for skalarmultiplikasjonen her for å ikke blande den sammen med vanlig multiplikasjon av tall.)

Er $\mathbb{Z}$ – med disse operasjonene – et vektorrom?

7. Hvis V er et vektorrom som er en endelig mengde, hva kan du da si om antall elementer i V?
Hint: Kan V ha null elementer? Ett element? To elementer? Flere enn to?

8. La mengden D være det åpne intervallet mellom $-\pi/2$ og $\pi/2$:

$$D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Se på funksjonene sin, cos og tan som vektorer i $\mathcal{C}(D)$.

a) Er de lineært uavhengige?

b) Kan du få et annet svar ved å isteden se på dem som vektorer i $\mathcal{C}(E)$, der E er en delmengde av D?

9. La V være et vektorrom. Vis at følgende påstander følger fra vektorromsaksiomene.

a) Hvis $c \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$, så må vi ha enten $c = 0$ eller $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (eller begge).

b) Hvis $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ for tre vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ i V, så følger det at $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

c) $c \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ for all skalarer c.

d) $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$ for alle vektorer $\mathbf{v}$.

10. Utfordring
Vi har kun definert hva en basis er for endeligdimensjonale vektorrom. For å definere en basis til et uendeligdimensjonalt vektorrom, må vi først forstå hva i) spenne ut og ii) lineær uavhengighet skal bety for uendelige mengder.

Hvis S er en uendelig mengde av vektorer i et vektorrom V, så definerer vi følgende:
i) Vi sier at S *spenner ut* V dersom enhver vektor $\mathbf{v}$ i V kan skrives som en lineærkombinasjon av et endelig antall vektorer i S.
ii) Vi sier at S er *lineært uavhengig* dersom enhver ligning

$$x_1\mathbf{s}_1 + \ldots x_n\mathbf{s}_n = \mathbf{0}$$

(hvor $\mathbf{s}_i$-ene er vektorer i S) kun har den trivielle løsningen $x_i = 0$ for alle i.

Nå kan vi definere en basis for vilkårlige vektorrom: En delmengde $\mathscr{B}$ av et vektorrom V er en *basis* for V dersom den spenner ut V og er lineært uavhengig.

(Her definerer vi en basis som en mengde og ikke en liste, siden det blir vanskelig å ha en rekkefølge på basisvektorene når det kan være uendelig mange av dem.)

a) Foreslå en basis for det uendeligdimensjonale vektorrommet $\mathcal{P}$.

b) Vis at forslaget ditt er en basis.