# Øving 7

## Oppgaver til kapittel 8

**1.** La $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ være funksjonen gitt ved formulen $f(z) = z^2$. Er $f$ injektiv, surjektiv, bijektiv?

**2.** Finn ut om funksjonen $T$ er en lineærtransformasjon mellom reelle vektorrom. Hvis den er det: Finn standardmatrisen til $T$, regn ut $\ker T$ og $\operatorname{im} T$, og finn ut om $T$ er injektiv, og om den er surjektiv.

**a)** $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \tan x \\ e^y \end{bmatrix}$

**b)** $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = 2x + y$

**c)** $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = 2x + y - 1$

**d)** $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = x^2 + y^2$

**e)** $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - 5y + 4z \\ y - 6z \end{bmatrix}$

**f)** $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ x + y \\ y + z \\ z + w \end{bmatrix}$

**g)** $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = 2x + 3z - 4w$

**3.** La $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ være en lineærtransformasjon gitt ved $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - 2y \\ -x + 3y \\ 3x - 2y \end{bmatrix}$. Finn en vektor $\mathbf{v}$ slik at $T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$.

**4.** Avgjør om følgende påstand er korrekt: En funksjon $T\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ er en lineærtransformasjon hvis og bare hvis $T$ kan skrives på formen $T(x) = ax + b$, der $a$ og $b$ er konstanter.

**5.**

**a)** Finn en basis $\mathscr{B}$ for $\mathcal{P}_2$ slik at

$$[\,p\,]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} p(0) \\ p'(0) \\ \frac{p''(0)}{2} \end{bmatrix}$$

er koordinatene til et andregradspolynom $p$.

**b)** Finn en basis $\mathscr{C}$ for $\mathcal{P}_2$ slik at

$$[\,p\,]_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{bmatrix}$$

er koordinatene til et andregradspolynom $p$.

**c)** La $p$ være gitt ved $p(x) = x^2$. Finn koordinatene til $p$ med hensyn på henholdsvis $\mathscr{B}$ og $\mathscr{C}$.

**d)** Finn lineærtransformasjoner som oversetter mellom disse basisene, altså

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{og} \quad S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

slik at

$$T([\,p\,]_{\mathscr{B}}) = [\,p\,]_{\mathscr{C}} \quad \text{og} \quad S([\,p\,]_{\mathscr{C}}) = [\,p\,]_{\mathscr{B}}$$

for alle polynomer $p$. Sjekk at $T$ og $S$ gir riktig resultat for koordinatene du fant del **c)**.

**6.** La $T_\theta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være lineærtransformasjonen som roterer vektorer med vinkelen $\theta$.

**a)** Finn standardmatrisen for $T_\theta$.

**b)** Bevis den trigonometriske likningen

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta).$$

Hint: Sammenlign $T_{2\theta}$ og $T_\theta \circ T_\theta$.

**7.** La $T\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ være en lineærtransformasjon fra $\mathbb{C}^n$ til seg selv, og la $A$ være standardmatrisen til $T$. Vis at følgende påstander er ekvivalente:

(a) $A$ er inverterbar.

(b) Kolonnene i $A$ er lineært uavhengige.

(c) Kolonnene i $A$ utspenner $\mathbb{C}^n$.

(d) $T$ er injektiv.

(e) $T$ er surjektiv.

(f) $T$ er en isomorfi.

**8.** La $U$, $V$ og $W$ være endeligdimensjonale vektorrom, og anta at vi har lineærtransformasjoner

$$U \xrightarrow{T} V \xrightarrow{S} W$$

slik at sammensetningen $S \circ T$ er en isomorfi.

**a)** Kan du ut fra dette konkludere med om $T$ og $S$ er injektive og/eller surjektive?

**b)** Hva kan du si om dimensjonene til $U$, $V$ og $W$?