Øving 8

Oppgaver til kapittel 9

1.

a) Regn ut egenverdiene til

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

og finn tilhørende egenrom.

b) Skissér egenrommene.

2.

a) Regn ut egenvektorene til

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

og finn tilhørende egenrom.

b) Skissér egenrommene.

3. Avgjør om følgende påstander er sanne eller ikke. Begrunn svaret ditt.

a) En $n \times n$-matrise har alltid n egenverdier.

b) Dersom A har en ikke-null egenverdi c, så kan ikke A være lik null-matrisen.

c) To egenvektorer til en matrise A som svarer til samme egenverdi kan være lineært uavhengige.

4. La A være en $n \times n$-matrise. Vis at A og dens transponerte $A^\top$ har like egenverdier.
Hint: Husk at determinanten til en matrise B og dens transponerte $B^\top$ er like.

5. La A være en $n \times n$-matrise som har n forskjellige egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Lag en $n \times n$-matrise

$$V = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix},$$

der $\mathbf{v}_1$ er en egenvektor som hører til egenverdien λ_1, og $\mathbf{v}_2$ er en egenvektor som hører til egenverdien λ_2, og så videre.

a) Kan du finne ut om matrisen V er inverterbar eller ikke?

b) Dersom V er inverterbar, hvordan ser matrisen $V^{-1}AV$ ut?

c) Finn en 3×3-matrise som har egenverdier 1, 2 og 3, med tilhørende egenvektorer

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

6. Er kolonnene lineært avhengige? Hvis ja, finn nullrommet til matrisen.

a)

$$\begin{bmatrix} 2i & 3i & 4i \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 2i & 3 & 4 \\ 3 & 4i & 5 \\ 4 & 5 & 6i \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} 2i & 3 & 4 \\ 3i & 4 & 5 \\ 4i & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

7. Finn hver matrises determinant, egenverdier og tilhørende egenrom.

a)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

d)

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

8. Beregn produktet av egenverdiene for hver matrise i forrige oppgave.

9. Sett sammen egenvektorene til

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i en 3×3-matrise P der egenvektorene er kolonner, og beregn $P^{-1}AP$.

10. Finn egenverdiene til matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

11. Vis at dersom matrisen A har egenverdi λ, har A^2 egenverdi λ^2.

12. Finn egenverdiene til rotasjonsmatrisen

$$T_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Hva er egenverdiene til $T_{2\theta}$?