Øving 10

Oppgaver til kapittel 11

1. Hvilke matriser representerer projeksjoner?

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **e)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **f)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Hvilke av vektorene er ortogonale med hverandre?

a) $\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix}$

3. Beregn $P_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ og $\mathbf{v} - P_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ når

a) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

d) Hva er $P_{\mathbf{u}}\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} - P_{\mathbf{u}}\mathbf{v})$ i del **a)**-**c)**?

4. Finn den adjungerte matrisen til

$$\begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & -i \\ 2-i & 1+i \end{bmatrix}$$

5. Vis at vektorene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

utgjør en ortogonal basis for $\mathbb{R}^3$, og finn koordinatene til punktet

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

i denne basisen.

6. Vi ser på indreproduktrommet av stykkevis kontinuerlige funksjoner over $[0, 1]$. Regn ut indreproduktet, vinkelen og avgjør om de er ortogonale:

a) $-x$ og e^x

b) $x^3 - \frac{1}{3}x$ og $x - \sin x$

c) x og $x^2 - \frac{3}{4}x$

7. Finn det ortogonale komplementet til underrommet utspent av

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

8. Finn en ortonormal basis for rommet utspent av

a) $\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix}$

9. Finn den ortogonale projeksjonen av vektoren

$$\begin{bmatrix} i \\ 2+i \\ 1 \end{bmatrix}$$

på underrommet utspent av vektorene

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

10. La $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

a) Regn ut den ortogonaleprojeksjonen av $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ på $\mathbf{v}$.

b) Finn standardmatrisen $[P_{\mathbf{v}}]$ til $P_{\mathbf{v}}$.

c) Gi et geometrisk argument til å avgjøre om $P_{\mathbf{v}}$ er surjektiv og/eller injektiv.

d) Gi et geometrisk argument til å bestemme dimensjonen til $\ker P_{\mathbf{v}}$, $\text{Null}[P_{\mathbf{v}}]$, $\text{im}\, P_{\mathbf{v}}$ og $\text{Col}[P_{\mathbf{v}}]$.

11. Vi ser på indreproduktrommet av stykkevis kontinuerlige funksjoner over $[0, 1]$.

a) Regn ut lengden til x, x^2, x^3, x^4 og x^5.

b) Hva er lengden til x^n for en vilkårlig n? Hva skjer når $n \to \infty$?

c) Skissér x^n for nok n til at du kan gi en geometrisk forklaring på grensen i del **b)**.
Hint: Lengden er koblet til arealet under grafen. Hva skjer med dette arealet når n vokser?