

# Øving 11

## Oppgaver til kapittel 12

1. Bruk minste kvadraters metode på

a)  $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  og  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix}$

b)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  og  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

c)  $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}$  og  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}$ .

2. Vi vil finne polynomer som passer til datasettet

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 28 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 65 \end{bmatrix}.$$

a) Finn polynomet  $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  med best tilpasning.

b) Ser du noe artig?

3. Finn linjen  $y = ax + b$  som passer best til datapunktene  $(2, 1)$ ,  $(5, 2)$ ,  $(7, 3)$ ,  $(8, 3)$ .

4. Finn likevektsvektorene for de stokastiske matriksene

a)  $A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}$

b)  $B = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 \\ 0.9 & 0.5 \end{bmatrix}$

c)  $C = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.8 \\ 0 & 0.5 & 0.1 \\ 0.6 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$

5. Forskere vil løse klimaproblemet og tester forskjellige metoder for å transformere  $CO_2$  i andre mindre skadelige gasser, vi kaller dem gass  $A$  og gass  $B$ . I eksperimentet forandrer seg det lukkede systemet med gassene hver dag etter det følgende mønsteret:

- 15% av gass  $A$  går over til gass  $B$  og 5% går over til  $CO_2$ , (dvs 80% av gass  $A$  forblir gass  $A$ ),
- 15% av gass  $B$  går over til gass  $A$  og 5% går over til  $CO_2$ ,
- mens 10% av  $CO_2$  går over til gass  $A$  og 10% av  $CO_2$  går over til gass  $B$ .

Forskerne begynner med en fordeling der det er like mye av alle tre gassene is systemet.

a) Finn en stokastisk matrise som beskriver systemet.

b) Finn likevektsvektoren for matrisen. Til hvilken fordeling av gassene konvergerer systemet? Spiller startfordelingen en rolle?

6. La  $S$  være  $1 \times n$ -matrisen med 1 i alle kolonnene, dvs  $S = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$ .

a) Forklar hvorfor en vektor  $\mathbf{x}$  i  $\mathbb{R}^n$  er en sannsynlighetsvektor hvis og bare hvis alle koordinatene er ikke-negative og  $S\mathbf{x} = 1$ .

b) La  $P$  være en stokastisk  $n \times n$ -matrise. Vis at  $SP = S$ .

c) La  $P$  være en stokastisk  $n \times n$ -matrise og  $\mathbf{x}$  en sannsynlighetsvektor. Vis at  $P\mathbf{x}$  også er en sannsynlighetsvektor.