NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4115 Matematikk 3 - LF**

Faglig kontakt under eksamen: Aslak Bakke Buan[a], Morten Nome[b], Gereon Quick[c], Tjerand Silde[d], Morten Solberg[e]

Tlf:

Eksamensdato: 20.mai 2020

Eksamenstid (fra–til): 09:00-13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: A: Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt. Alle kalkulatorer tillatt.

Annen informasjon:

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 14

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Oppgave 1 Vi skal løse ligningssystemet

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 7 \\ x + y + 2z = 4 \\ x - y - z = 0. \end{cases}$$

Vi setter opp totalmatrisen og radreduserer:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Vi ser at systemet har løsningen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 2 Vi ser på et system med totalmatrise

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Dersom a ikke er 0, så er det umulig å tilfredstille ligningen $0 = a$ som tilsvarer den andre raden i totalmatrisen. Da har systemet ingen løsning. Men dersom $a = 0$, så har vi kun ligningen $x + 2y + 4z = 0$ fra den første raden i totalmatrisen. Denne ligningen har uendelig mange løsninger. Altså avhenger løsningsmengden av verdien til a.

Oppgave 3 Vi vil finne ut for hvilken vektor $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ ligingen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en løsning. Det er mange forskjellige måter å løse denne oppgaven på. En måte er å begynne med en generell vektor $\mathbf{b}$ og å radredusere totalmatrisen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & b_1 \\ 1 & 2 & 6 & b_2 \\ 0 & 3 & 6 & b_3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & b_1 \\ 0 & 1 & 2 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - 3(b_2 - b_1) \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2b_1 - b_2 \\ 0 & 1 & 2 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - 3(b_2 - b_1) \end{array}\right].$$

Den tredje raden gir oss at koordinatene til **b** må tilfredstille ligningen

$$b_3 - 3(b_2 - b_1) = 0.$$

Fra lista av vektorer i oppgaven oppfyller kun vektoren

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

denne ligningen. Faktisk har vi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Alternativt kan vi observere at kolonnene i A er lineært avhangige:

$$2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Da blir det lett å sjekke hvilken vektor som ligger i kolonnerommet til A fordi vi ikke trenger den tredje kolonnen. Nå kan vi enten igjen løse et ligningssystem eller bare teste de fire alternativene ved å utnytte at $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ har en 0 som tredje koordinat. Vi får at

$$-\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 4 Vi finner determinanten på vanlig måte med kofaktorekspansjon langs andre kolonnen:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = 2 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 1 & a \\ a & -2 \end{bmatrix}\right) = 2(-2 - a^2) = -4 - 2a^2.$$

Oppgave 5 Vi vet fra den forrige oppgaven at $\det A = -4 - 2a^2$ og vi vet at A ikke er invertibel hvis og bare hvis $\det A = 0$. Altså får vi

$$A \text{ er ikke invertibel} \iff -4 - 2a^2 = 0 \iff a^2 = -2 \iff a = \pm i\sqrt{2}.$$

Alternativt: Dersom vi ikke klarte å beregne determinanten til matrisen, kan vi også radredusere matrisen først

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 - a^2 \end{bmatrix}.$$

Nå husker vi at en matrise er invertibel hvis og bare hvis den er radekvialent til identitetsmatrisen. Og det er tilfellet hvis og bare hvis alle kolonner i matrisen er pivotkolonner. For vår matrise skjer dette hvis og bare hvis $-2 - a^2 \neq 0$. Igjen får vi at A ikke er invertibel hvis og bare hvis $a = \pm i\sqrt{2}$.

Oppgave 6 Parallellogrammet er utspent av vektorene

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi har lært i kapittel 6 at vi kan beregne arealet ved å beregne determinanten til matrisen med disse kolonnevektorene:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\right) = 4 + 6 = 10.$$

Arealet av parallellogrammet er altså 10.

I Oppgave 7-10 er $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ et ligningssytem der A er en reell $m \times n$-matrise.

Oppgave 7 Et ligningssytem har enten ingen, nøyaktig én eller uendelig mange løsninger. Det betyr at hvis systemet har minst to løsninger, så har det uendelig mange. Påstanden er *sann*.

Oppgave 8 Dersom $m = n$, så kan systemet fremdeles har enten ingen, nøyaktig én eller uendelig mange løsninger. To moteksempler til påstanden: Dersom A er nullmatrisen og $\mathbf{b}$ ikke er nullvektoren, så har systemet ingen løsning. Dersom A har lineært avhengige kolonner og $\mathbf{b}$ ligger i kolonnerommet til A, så har systemet uendelig mange løsninger. For eksempel: Når

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

har systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ uendelig mange løsninger: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ for alle $t \in \mathbb{R}$.
Påstanden er *usann.*

Oppgave 9 Dersom A har to like rader, så betyr det kun at rangen til A er mindre enn m. Systemet kan likevel har løsninger. For eksempel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Påstanden er *usann.*

Oppgave 10 Dersom $m > n$, finnes det uendelig mange vektorer i $\mathbb{R}^m$ som ikke ligger i kolonnerommet til A. Det betyr at det er mulig at systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ikke har noen løsning. For eksempel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ har ingen løsning.}$$

Påstanden er *usann.*

I Oppgave 11-12 ser vi på matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Oppgave 11 Matrisen A er en øvre triangulær matrise. Egenverdiene til A er da elementene på diagonalen, altså 1 og 2 (der 2 har algebraisk multiplisitet 2).

Oppgave 12 Vi vet fra Kapittel 11 at vi leter etter en matrise P der kolonnene er lineært uavhengige egenvektorer til egenverdiene til A. Vi kan altså for eksempel bare teste hvilken av de gitte matrisene har egenvektorer (til A) som kolonner eller vi bestemmer egenrommene til A. Egenrommet til egenverdi 1 er utspent av $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, mens egenrommet til egenverdi 2 er utspent av vektorene $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Riktig svar er altså

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alternativt: Om vi ikke stoler på vårt svar i forrige oppgaven, så kan vi rett og slett beregne $P^{-1}AP$ for de forskjellige valgene av P og sjekke om resultatet blir en diagonalmatrise (som har da nødvendigvis 1, 2 og 2 som elementer på diagonalen.

Oppgave 13 Lineærtransformasjonen T har egenverdiene 1 og -1 ettersom vi beregner $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Oppgave 14 Matrisen $A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ har egenverdi a med algebraisk multiplisitet 3. Matrisen A er altså diagonaliserbar hvis og bare hvis vi kan finne en basis for $\mathbb{R}^3$ som består av egenvektorer til egenverdi A. Det betyr at A er diagonaliserbar hvis og bare hvis $A\mathbf{x} = a\mathbf{x}$ for alle vektorer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Men hvis $b \neq 0$, så har vi for eksempel

$$\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ a \end{bmatrix} \neq a\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Derimot er A en diagonalmatrise dersom $b = 0$. Riktig svar er altså at A er diagonaliserbar for alle verdier av a og $b = 0$.

Oppgave 15 Fordi A har egenverdi 3, vet vi at det finnes en egenvektor $\mathbf{v}$ med $A\mathbf{v} = 3\mathbf{v}$. Vi ganger denne ligningen med A^{-1}:

$$A^{-1}A\mathbf{v} = A^{-1}(3\mathbf{v}) \iff \mathbf{v} = 3A^{-1}\mathbf{v} \iff \frac{1}{3}\mathbf{v} = A^{-1}\mathbf{v}.$$

Dette viser at $\frac{1}{3}$ er en egenverdi til A^{-1} (med egenvektor $\mathbf{v}$).

I Oppgave 16-20 er A en reell 3×3-matrise og B er en kompleks 3×3-matrise.

Oppgave 16 En reell 3×3-matrise har alltid komplekse egenverdier. Husk at egenverdiene er løsningene til $\det(A - \lambda I) = 0$. Dette er en polynomligning i variablen λ av grad 3 med reelle koeffisienter. Fundamentalteoremet i algebra sier at en slik polynomligning alltid har 3 komplekse løsninger. Påstanden er *usann.*

Oppgave 17 Påstanden er *usann.* Et moteksempel er gitt ved matrisen

$$B = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$$

som kun har den komplekse egenverdien i.

Oppgave 18 Påstanden er *usann.* Et moteksempel er gitt ved matrisen

$$B = \begin{bmatrix} i & 0 & i \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}.$$

Da kan vi bruke det samme argumentet som i Oppgave 14.

Oppgave 19 En reell 3×3-matrise har alltid minst én reell egenverdi. Egenverdiene er løsningene til $\det(A - \lambda I) = 0$. Dersom vi oppfatter $\det(A - \lambda I)$ som en reell funksjon i variablen λ, så sier Skjæringssetningen vi lærte om i Matte 1 at det finnes en $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ slik at $\det(A - \lambda_0 I) = 0$. (Se også Teorem 10.15 i notatene.) Påstanden er altså *sann.*

Oppgave 20 Teorem 11.14 i forelesningsnotatene sier at en reell symmetrisk matrise A har kun reelle egenverdier. Påstanden er *sann.*

I Oppgave 21-23 skal vi undersøke om mengdene er underrom. Vi må sjekke tre ting:

1. Er $\mathbf{0}$ med i mengden?
2. Lukket under addisjon?
3. Lukket under skalarmultiplikasjon?

Oppgave 21 La

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x = y \right\}.$$

1. $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ligger i V.
2. $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix}$. Dersom $x_1 = y_1$ og $x_2 = y_2$, så gjelder også $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$. Altså er mengden lukket under addisjon.
3. $c \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx \\ cy \\ cz \end{bmatrix}$. Dersom $x = y$, så gjelder også $cx = cy$ for alle $c \in \mathbb{R}$. Mengden er dermed lukket under skalarmultiplikasjon.

Vi ser at V er et underrom av $\mathbb{R}^3$ og dermed et vektorrom.

Oppgave 22 La

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = |y| \right\}.$$

Dette er *ikke* et underrom. Se for eksempel på vektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vektorene $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ ligger i mengden, mens

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ligger ikke i mengden. Mengden er dermed ikke lukket under addisjon og er ikke et vektorrom.

Oppgave 23 La

$$V = \left\{ p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 \mid p'(x) = 0 \right\}.$$

1. Nullvektoren i $\mathcal{P}_2$ er polynomet som er konstant 0. Den deriverte til en konstant funksjon er 0. Dermed ligger nullvektoren i mengden V.
2. Dersom $p'(x) = 0$ og $q'(x) = 0$, så er også $(p+q)'(x) = p'(x) + q'(x) = 0$. Mengden er altså lukket under addisjon.
3. Dersom $p'(x) = 0$, så er også $(cp)'(x) = cp'(x) = 0$. Mengden er altså lukket under skalarmultiplikasjon.

Vi ser at V er et underrom av $\mathcal{P}_2$ og dermed et vektorrom.

I Oppgave 24-26 er A en 3×3-matrise og I_3 er 3×3-identitsmatrisen. Vi må sjekke om T er en lineærtransformasjon. Da må vi sjekke: $T(c\mathbf{v} + d\mathbf{w}) = cT(\mathbf{v}) + dT(\mathbf{w})$ for alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ og alle $c, d \in \mathbb{R}$. Især må gjelde $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Oppgave 24 Funksjonen er ikke en lineærtransformasjon ettersom

$$T(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}.$$

Oppgave 25 Vi ser at for alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ og alle $c, d \in \mathbb{R}$ gjelder

$$\begin{aligned} T(c\mathbf{v} + d\mathbf{w}) &= (A^2 + I_3)(c\mathbf{v} + d\mathbf{w}) = A^2(c\mathbf{v} + d\mathbf{w}) + I_3(c\mathbf{v} + d\mathbf{w}) \\ &= cA^2\mathbf{v} + dA^2\mathbf{w} + cI_3\mathbf{v} + dI_3\mathbf{w} = c(A^2\mathbf{v} + I_3\mathbf{v}) + d(A^2\mathbf{w} + I_3\mathbf{w}) \\ &= c(A^2 + I_3)\mathbf{v} + d(A^2 + I_3)\mathbf{w} \\ &= cT(\mathbf{v}) + dT(\mathbf{w}). \end{aligned}$$

Funksjonen er en lineærtransformasjon.

Oppgave 26 Funksjonen er ikke en lineærtransformasjon ettersom T sender funksjonen som er konstant null (som er nullvektoren i $\mathcal{P}_2$) til funksjonen som er konstant 1 (som ikke er nullvektoren i $\mathcal{P}_2$).

I Oppgave 27-30 er V et vektorrom med $\dim V = n$ med $n \geq 2$.

Oppgave 27 Påstanden er at alle mengder av $n-1$ vektorer i V er lineært uavhengige. Det er *usant*. For eksempel er hver mengde lineært avhengig dersom nullvektoren er element i mengden.

Oppgave 28 Påstanden er at alle mengder av $n+1$ vektorer er lineært avhengige. Påstanden er *sann*. Dette er Teorem 7.21 i forelesningsnotatene.

Oppgave 29 Påstanden er at ingen lineærtransformasjon $T\colon V \to V$ med $T^2 = 0$ er injektiv. Påstanden er *sann*. Vi gir nå en begrunnelse ved å skille mellom to mulige tilfeller:
1) Dersom T er funksjonen som sender alle vektorer til nullvektoren, så er $\operatorname{Null} T = V \neq \{\mathbf{0}\}$ og Teorem 8.9 i forelesningsnotatene sier at T ikke er injektiv.
2) Dersom det finnes en vektor $\mathbf{v} \in V$ med $T(\mathbf{v}) =: \mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, så har vi $T(\mathbf{w}) = T(T(\mathbf{v})) = T^2(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Altså er $\operatorname{Null} T \neq \{\mathbf{0}\}$ og Teorem 8.9 i forelesningsnotatene sier igjen at T ikke er injektiv.

Oppgave 30 Påstanden er at alle lineærtransformasjoner $T\colon V \to V$ med $T^2 = T$ er injektive. Påstanden er *usann*. Et moteksempel er gitt ved funksjonen $T\colon V \to V$ som sender alle vektorer i V til nullvektoren. Et annet eksempel er gitt ved lineærtransformasjonen

$$T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v} \text{ med } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

I Oppgave 31-32 ser vi på datasettet som består av punktene $(-1,-1)$, $(0,0)$ og $(1,2)$ i $\mathbb{R}^2$.

Oppgave 31 Vi leter etter en linje $y = cx + d$ som passer best til punktene. Husk at dersom det fantes en linje gjennom alle punktene så kunne vi finne $c, d \in \mathbb{R}$ slik at

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Men fordi punktene ikke ligger på en linje, kan vi kun finne en linje som minimerer avstanden til alle punktene. Det gjør vi ved å bruke minste kvadraters metode på

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Vi beregner

$$A^T A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ og } A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nå må vi løse ligningssystemet med totalmatrisen

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/3 \end{array}\right].$$

Linjen er altså $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{3}$.

Oppgave 32 Vi leter etter et polynom $p(x) = ax^2 + bx + c$ som går gjennom punktene. Vi må altså løse ligningssystemet med totalmatrisen (husk at første kolonne er x-koordinatene til punktene opphøyd i andre potens, andre kolonne er x-koordinatene til punktene og tredje kolonne er alltid konstant 1):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Polynomet er altså $p(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$.

I Oppgave 33-35 er $T\colon \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ gitt ved $T(p(x)) = p'(x) + p''(x)$ og $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ er en basis for $\mathcal{P}_2$.

Oppgave 33 Vi leter etter standardmatrisen for T med hensyn til basis $\mathcal{B}$. Vi skriver $\mathbf{b}_1 = 1$, $\mathbf{b}_2 = x$ og $\mathbf{b}_3 = x^2$ for basisvektorene. Kolonnene i $[T]_{\mathcal{B}}$ er koordinatvektorene til $T(\mathbf{b}_1)$, $T(\mathbf{b}_2)$ og $T(\mathbf{b}_3)$ med hensyn til basis $\mathcal{B}$. Vi må altså sjekke hva T gjør med basisvektorene:

$$T(1) = 0,\ T(x) = 1,\ T(x^2) = 2x + 2.$$

Med andre ord:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{b}_1) &= 0 \cdot \mathbf{b}_1 + 0 \cdot \mathbf{b}_2 + 0 \cdot \mathbf{b}_3, \\ T(\mathbf{b}_2) &= 1 \cdot \mathbf{b}_1 + 0 \cdot \mathbf{b}_2 + 0 \cdot \mathbf{b}_3, \\ T(\mathbf{b}_3) &= 2 \cdot \mathbf{b}_1 + 2 \cdot \mathbf{b}_2 + 0 \cdot \mathbf{b}_3. \end{aligned}$$

Koordinatvektorene er dermed

$$[T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ [T(\mathbf{b}_3)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Standardmatrisen $[T]_{\mathcal{B}}$ er dermed

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 34 For polynomet $p(x) = ax^2 + bx + c$ beregner vi

$$T(p(x)) = 2ax + b + 2a.$$

For at $T(p(x))$ er konstant 0 (som er nullvektoren i $\mathcal{P}_2$), må vi altså ha $a = 0$ og $b + 2a = 0$, dvs $a = 0$ og $b = 0$. Derimot får vi ikke noe krav for c. Vi får dermed at $T(p(x)) = \mathbf{0}$ hvis og bare hvis $p(x)$ er konstant. $\operatorname{Null} T$ er altså utspent av $\mathbf{b}_1 = 1$. Dette viser $\dim \operatorname{Null} T = 1$.

Alternativt: Vi husker fra Kapittel 7 i forelesningsnotatene at dimensjonen til nullrommet til T er lik antall kolonner i $[T]_{\mathcal{B}}$ som ikke er pivotkolonner. Vi ser fra Oppgave 33 at den andre og tredje kolonnen i $[T]_{\mathcal{B}}$ er pivotkolonner, kun den første kolonnen ikke har et pivotelement. Dermed er $\dim \operatorname{Null} T = 1$.

Alternativt: Vi ser at kolonnerommet til T er utspent av $\mathbf{b}_1 = 1$ og $\mathbf{b}_2 = x$. Vi ser altså $\dim \operatorname{Col} T = 2$. Likheten $\dim \operatorname{Null} T + \dim \operatorname{Col} T = 3$ fra Kapittel 7 gir oss derfor $\dim \operatorname{Null} T = 1$.

Oppgave 35 Den eneste egenverdien til T er 0. Dette følger for eksempel fra at $[T]_{\mathcal{B}}$ er en øvre triangulærmatrise med 0 som diagonalelementer.

Alternativt: Vi ser at $T^3 = 0$ fordi

$$T(T(T(ax^2 + bx + c))) = T(T(2ax + b + 2a)) = T(2a) = 0.$$

Hvis λ er en egenverdi til T, så må vi ha $\lambda^3 = 0$. Dette krever $\lambda = 0$. Fordi vi har $T(1) = 0$, er $\lambda = 0$ faktisk en egenverdi til T og dermed den eneste.

Oppgave 36 Det er gitt at $y(t)$ oppfyller differensialligningen $y''-4y'+4y=0$ sammen med $y(0)=0$ og $y'(0)=1$. For å finne y løser vi først ligningen

$$\lambda^2-4\lambda+4=0 \iff (\lambda-2)^2=0 \iff \lambda=2.$$

Vi husker fra Kapittel 14 i forelesningsnotatene at funksjonen y er der på formen

$$y(t)=e^{2t}(c_1t+c_0)$$

med konstanter c_0 og c_1. Vi kan bestemme konstantene c_0 og c_1 ved hjelp av initialverdiene:

$$y(0)=0 \iff e^0(c_1\cdot 0+c_0)=0 \iff c_0=0.$$

Med $y'(t)=e^{2t}(c_1(2t+1)+2c_0)$ og $c_0=0$ får vi

$$y'(0)=1 \iff e^0c_1=1 \iff c_1=1.$$

Vi får altså $y(t)=te^{2t}$. Nå kan vi beregne $y(1)=e^2\approx 7,389...$.

Oppgave 37 Vi løser systemet. Først finner vi egenverdiene til matrisen $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$:

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I_2)=0 &\iff (-\lambda)(-1-\lambda)-(-1)=0\\ &\iff \lambda^2+\lambda+1=0\\ &\iff (\lambda+\frac{1}{2})^2=-\frac{3}{4}\\ &\iff \lambda=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Vi har altså to komplekse egenverdier med reell del $-\frac{1}{2}$. En løsning er dermed på formen $\mathbf{y}(t)=e^{-\frac{1}{2}t}\mathbf{w}(t)$ der $\mathbf{w}(t)$ er en vektor med elementer som har begrenset absoluttverdi (for å overbevise deg beregn den generelle løsningen til systemet eller se på løsningen nede). Når t går mot uendelig, går $e^{-\frac{1}{2}t}$ mot 0. Det betyr at absoluttverdiene av elementene i $\mathbf{y}(t)$ går mot 0. Vi kan altså konkludere:

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}.$$

For å overbevise oss at dette virkelig fungerer beregner vi egenvektorer som hører til $\lambda=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ og $\bar{\lambda}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$\mathbf{v}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 1\end{bmatrix} \text{ og } \bar{\mathbf{v}}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 1\end{bmatrix}.$$

Løsningsrommet til systemet blir dermed utspent av

$$\mathbf{y}_1(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2}\\1\end{bmatrix}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) \text{ og}$$
$$\mathbf{y}_2(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2}\\1\end{bmatrix}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right).$$

La oss skrive

$$\mathbf{w}_1(t) = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)-\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2}\\1\end{bmatrix}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \text{ og} \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2}\\1\end{bmatrix}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

Når vi husker at absoluttverdiene til sin og cos alltid er mindre eller lik 1 ser vi at lengden til både $\mathbf{w}_1$ og $\mathbf{w}_2$ kan estimeres ved

$$||\mathbf{w}_1|| \leq ||\mathbf{v}|| = \sqrt{2} \text{ og } ||\mathbf{w}_2|| \leq ||\mathbf{v}|| = \sqrt{2}.$$

Dette viser

$$||\mathbf{y}_1(t)|| = e^{-\frac{1}{2}t}||\mathbf{w}_1|| \leq e^{-\frac{1}{2}t}\sqrt{2} \text{ og } ||\mathbf{y}_2(t)|| = e^{-\frac{1}{2}t}||\mathbf{w}_2|| \leq e^{-\frac{1}{2}t}\sqrt{2}.$$

Fordi $\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{1}{2}t}\sqrt{2} = 0$, viser dette at lengden til alle vektorfunksjoner som løser systemet vil gå mot 0 når t går mot ∞. Fordi nullvektoren er den eneste vektoren med lengde 0, må vi ha

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}.$$

Oppgave 38 For ethvert komplekst tall $z \neq 0$ finnes det et komplekst tall w med $zw = 1$: Om vi skriver $z = a + bi$, så er $w = z^{-1}$ gitt ved

$$w = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i.$$

Tallet $w = z^{-1}$ eksisterer dermed *ikke* hvis og bare hvis $z = 0$, med andre ord hvis og bare hvis $a = 0$ og $b = 0$.

Oppgave 39 Vi har $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = e^{i\frac{\pi}{6}}$. Å gange et komplekst tall med z tilsvarer derfor en rotasjon om vinkelen $\frac{\pi}{6} \approx 0,52359....$ Vi godtar alle svar som ligger mellom 0.52 og 0.53.

Oppgave 40 Det er minst to muligheter å finne riktig svar. Vi kan for eksempel observere at alle tre alternativene har samme overgangssannsynlighet fordi vi kun permuterer $50 - 50$ sjansen. Derfor blir det like ofte alle tre alternativene i det lange løp.

En mer matematisk tilnærming er at vi oppsummerer informasjonen i en tabell hvor vi skriver ned hvor sannsynlig overgangen fra en rett til den andre er hver dag. Vi skriver Sj for sjokoladeegg, Sp for speilegg og B for bløtkokt, og uttrykker sannsynlighetene ved desimaltall:

etter	Sj	Sp	B	blir det
	0.0	0.5	0.5	Sj
	0.5	0.5	0.0	Sp
	0.5	0.0	0.5	B.

Dette gir oss en overgangsmatrisen

$$M = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.0 \\ 0.5 & 0.0 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Dette er en stokastisk matrise og vi lærte i Kapittel 12 at en slik matrise har egenverdi 1. Vi finner tilhørende egenvektorer ved å løse ligningen $(M - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Detter gjør vi ved å radredusere matrisen $M - I$:

$$\begin{aligned} M - I &= \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & -0.25 & 0.25 \\ 0 & 0.25 & -0.25 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & -0.25 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Altså er alle vektorer $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ med $x = y = z$ (ettersom den første raden gir oss $x = z$ mens den andre gir oss $y = z$) egenvektorer til egenverdi 1. For at $\mathbf{x}$ skal være en likevektsvektor trenger vi i tillegg at $x + y + z = 1$, som vi får ved å sette $x = y = z = \frac{1}{3}$. Dette betyr at alle alternativene blir spist like ofte i det lange løp.