Kapittel 3

Vektor- og matriselikninger

Vi skal nå bruke enkel vektorregning til å analysere lineære ligningssystemer. Vi skal ha et spesielt fokus på $\mathbb{R}^3$, for det går an å visualisere; klarer man det, går det lettere å abstrahere til $\mathbb{R}^n$. Vi skal også abstrahere til $\mathbb{C}^n$, som er rommet av alle vektorer med komplekse koeffisienter.

Vektorregning

Inntil videre tenker vi på vektorer som søylevektorer:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Dersom komponentene er reelle, kan vi tenke på dette som et punkt i $\mathbb{R}^n$, og er de komplekse, tenker vi at det er et punkt i $\mathbb{C}^n$. De to viktigste regnereglene for vektorer er skalarmultiplikasjon

$$a\mathbf{x} = \begin{bmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \vdots \\ ax_n \end{bmatrix}$$

og vektoraddisjon

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}.$$

En vektor på formen

$$a\mathbf{x} + b\mathbf{y} = a \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + by_1 \\ ax_2 + by_2 \\ \vdots \\ ax_n + by_n \end{bmatrix}$$

sies å være *lineærkombinasjon* av vektorene $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$. Skalarene a og b kalles vekter, og de kan være reelle eller komplekse, alt etter om vi opererer i $\mathbb{R}^n$ eller $\mathbb{C}^n$. Inntil videre skal vi begrense oss til å gange reelle vektorer med reelle skalarer, og komplekse vektorer med komplekse skalarer, men det ligger ingen nødvendighet i dette.

Har vi m vektorer $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, sies en vektor på formen

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + ... + a_m\mathbf{x}_m$$

å være en lineærkombinasjon av vektorene $\mathbf{x}_i$, med vekter a_i.

Hvis vi har m vektorer $\mathbf{x}_k$ i $\mathbb{R}^n$ eller $\mathbb{C}^n$, definerer vi *det lineære spennet*, eller

$$\mathrm{Sp}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_m\}$$

som delmengden av $\mathbb{R}^n$ eller $\mathbb{C}^n$ bestående av alle vektorer på formen

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + ... + a_m\mathbf{x}_m,$$

altså alle lineærkombinasjoner av vektorene.

Eksempel 3.1. Vi tar et eksempel i $\mathbb{R}^3$.

$$3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 16 \\ 21 \end{bmatrix}$$

Spennet til vektorene i eksemplet over, er alle vektorer i $\mathbb{R}^3$ på formen

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix},$$

der a og b er reelle tall. △

Eksempel 3.2. Så et eksempel i $\mathbb{C}^n$.

$$3 \begin{bmatrix} i \\ 1 - 2i \\ 3 \end{bmatrix} + (2 - i) \begin{bmatrix} 2 + i \\ 5i \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 + 3i \\ 8 - 4i \\ -3 + 6i \end{bmatrix}$$

Spennet til vektorene over, er alle vektorer i $\mathbb{C}^3$ på formen

$$a \begin{bmatrix} i \\ 1 - 2i \\ 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 + i \\ 5i \\ -6 \end{bmatrix},$$

der a og b er komplekse tall. △

Spennet til en samling vektorer er altså en *mengde*. Vi skal senere se at spennet til en samling vektorer er et viktig eksempel på det vi vil kalle *vektorrom* i et senere kapittel.

I $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$ kan slike mengder lett visualiseres.

Eksempel 3.3. (a) Spennet til mengden $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ er x-aksen i xy-planet.

(b) Spennet til mengden $\left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \right\}$ i $\mathbb{R}^3$ (eller xyz-rommet) er alle vektorer på formen

$$\begin{bmatrix}a\\b\\0\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

for alle verdier av a og b. Dette er altså hele xy-planet. △

Beskriv geometrisk det lineære spennet til mengdene:

1) $\left\{ \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \right\}$ i $\mathbb{R}^2$

2) $\left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \right\}$ i $\mathbb{R}^3$

3) $\left\{ \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \right\}$ i $\mathbb{R}^2$

4) $\left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \right\}$ i $\mathbb{R}^3$

5) $\left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \right\}$ i $\mathbb{R}^3$

6) $\left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \right\}$ i $\mathbb{R}^3$

Vektorligninger

Det meste av lineær algebra dreier seg om vektorer, og problemer som kan formuleres ved hjelp av vektorer. Vi har allerede sett at lineære ligningssystemer kan formuleres ved hjelp av vektorer. Ligningssystemet fra forrige uke

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -5 \\ x + 5y + 9z = 33 \\ 2x + 5y - z = 0 \end{cases}$$

kan skrives som en *vektorligning* i $\mathbb{R}^3$:

$$x\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}2\\5\\5\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}-2\\9\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5\\33\\0\end{bmatrix}.$$

Dette gir oss en ny måte å se ligningssystemer på: oppgaven er å finne vektene x, y og z slik at søylene i matrisen lineærkombineres til å bli lik høyresiden.

Eksempel 3.4. Systemet over har nøyaktig én løsning, nemlig

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\-2\\4\end{bmatrix},$$

og du kan sjekke at

$$7\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}2\\5\\5\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}-2\\9\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5\\33\\0\end{bmatrix}.$$ △

Eksempel 3.5. I forrige uke løste vi systemet

$$\begin{aligned} (1-i)z + 3w &= 2 - 3i \\ iz + (1+2i)w &= 1 \end{aligned}$$

og fant at $z = 1 + i$. og $w = -i$. Du kan sjekke at

$$(1+i)\begin{bmatrix}1-i\\i\end{bmatrix} + (-i)\begin{bmatrix}3\\1+2i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2-3i\\1\end{bmatrix}.$$ △

Geometrisk tolkning av vektorligninger: Eksistens og entydighet av løsninger

Ligningssystemer deler seg naturlig i tre kategorier; de som har en unik løsning, de som har ingen løsning, og de som har uendelig mange løsninger. Vi skal nå gi noen geometriske illustrasjoner i $\mathbb{R}^3$ av hva som skjer i de forskjellige tilfellene.

Eksempel 3.6. Vektorligningen

$$x\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix}$$

har uendelig mange løsninger. Den utvidede matrisen er

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

som har redusert trappeform

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Velger vi $z = t$ som fri variabel, får vi generell løsning

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

Her er geometrisk forklaring: Siden de tre vektorene

$$\left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \right\}$$

alle ligger i samme plan (i dette tilfellet xy-planet), og $\begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix}$ også ligger i det samme planet, er det uendelig mange måter å løse vektorligningen på. △

Eksempel 3.7. Vektorligningen

$$x\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

har ingen løsninger. Den utvidede matrisen er

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Vi ser at den tredje raden tilsvarer den uløselige ligningen $0 = 1$. Vektoren $\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ ligger ikke i xy-planet, altså den er ikke i

$$\mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\},$$

og følgelig har ligningssystemet ingen løsning. △

Eksempel 3.8. Vektorligningen

$$x\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

har nøyaktig en løsning. Den utvidede matrisen er

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right]$$

som har redusert trappeform

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right]$$

Den unike løsningen er altså

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

Det lineære spennet

$$\mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

er hele $\mathbb{R}^3$. En hver vektor i $\mathbb{R}^3$ kan utspennes av disse tre på nøyaktig én måte. △

Vi sniker inn et eksempel i $\mathbb{C}^3$ også. Det er viktig å forstå at lineær algebra fungerer omtrent likt i $\mathbb{C}^n$ som i $\mathbb{R}^n$, det er bare vanskeligere å visualisere.

Eksempel 3.9. Vektorligningen

$$x\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}i\\1+i\\2-i\end{bmatrix}$$

har nøyaktig én kompleks løsning. Den utvidede matrisen er

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & i\\ 1 & 1 & 0 & 1+i\\ 0 & 0 & 1 & 2-i\end{array}\right]$$

som har redusert trappeform

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & i\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2-i\end{array}\right]$$

Den unike løsningen er altså

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}i\\1\\2-i\end{bmatrix}$$

Det lineære spennet

$$\mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

er hele $\mathbb{C}^3$, og en hver vektor i $\mathbb{C}^3$ kan utspennes av disse tre på nøyaktig én måte. △

I de to siste eksemplene har vi uttalt tilsynelatende motstridende utsagn som at det lineære spennet

$$\mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

er både hele $\mathbb{R}^3$ og hele $\mathbb{C}^3$. Begge deler er riktig, for det kommer an på om man tillater vekter fra $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. Dette skal vi komme tilbake til senere i emnet.

En forsmak på determinanter

Vi skal senere se at vi for kvadratiske matriser kan regne ut et tall, en *determinant*, som gir viktig informasjon om matrisens egenskaper. Motivasjonen for dette kommer fra volumberegninger i $\mathbb{R}^3$.

Eksempel 3.10. Ligningssystemet

$$x_1\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}2\\5\\5\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}-2\\9\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5\\33\\0\end{bmatrix}$$

har som vi har sett en unik løsning. Hvis du bytter ut vektoren på høyre side med hva som helst, vil systemet fremdeles ha en unik løsning. Grunnen er at de tre vektorene

$$\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix}2\\5\\5\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix}-2\\9\\-1\end{bmatrix}$$

ikke ligger i samme plan. △

Vi kan tenke at tre vektorer $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ i $\mathbb{R}^3$ danner tre sidekanter i et parallellepiped. Du husker forhåpentligvis fra skolematematikken at volumet av dette parallellepipedet er gitt ved

$$|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|.$$

Du kan avgjøre hvorvidt tre vektorer i $\mathbb{R}^3$ ligger i samme plan ved å beregne dette volumet. Dersom volumet blir 0, ligger de i samme plan.

Eksempel 3.11. Søylene i matrisen

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & 5 & 9\\ 2 & 5 & -1\end{bmatrix}$$

danner et parallellepiped med volum 2:

$$\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2\\5\\5\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}-2\\9\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}-50\\-8\\28\end{bmatrix} = -2.$$

Søylene ligger derfor ikke i samme plan. △

Dersom søylene i matrisen A kalles $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$, er *determinanten* til A definert ved

$$\det A = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}),$$

og volumet til parallellepipedet skrives $|\det A|$.

Eksempel 3.12. Vi har sett at søylene i matrisen fra Eksempel 3.8 ligger i samme plan. Vi har

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = 0.$$

som forventet. △

Presise kriterier for når et ligningssystem har én, ingen, eller mange løsninger, får vi ikke uten litt mer matematisk maskineri. Men et mentalt bilde av 3×3-systemer i $\mathbb{R}^3$ kan vi lage oss.

- Hvis matrisens søyler ikke ligger i samme plan, og dermed danner et parallellepiped med volum > 0 har systemet en unik løsning uansett høyreside.
- Hvis matrisens søyler ligger i samme plan, og høyresiden ikke ligger i dette planet, har systemet ingen løsning.
- Hvis matrisens søyler ligger i samme plan, og høyresiden ligger i dette planet, har systemet uendelig mange løsninger.

Eksempel 3.13. Du kan fint ta determinanten til en kompleks matrise:

$$\det \begin{bmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 2 & i \end{bmatrix} = -3 - 3i$$

Men da blir det ikke noe volum. Det er ikke så godt å si hva det blir. △