

# Kapittel 5

## Lineær uavhengighet

### Litt repetisjon

La  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  være en samling med vektorer i  $\mathbb{R}^m$  (eller i  $\mathbb{C}^m$ ). Husk at det lineære spennet  $\text{Sp}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  er samlingen av alle lineærkombinasjoner av  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ . Altså alle vektorer på formen

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_n\mathbf{v}_n$$

der  $a_i$  er tall.

For eksempel er det lineære spennet til vektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

alle vektorer på formen

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

altså alle punkter i  $xy$ -planet. La i tillegg

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Spennet til vektorene  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  og  $\mathbf{v}_3$  er også alle vektorer på formen

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

slik at

$$\text{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \text{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}.$$

Av forskjellige grunner er  $\text{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  er en bedre beskrivelse av  $xy$ -planet enn  $\text{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ . Den viktigste grunnen er kanskje at  $\text{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  inneholder en vektor som strengt tatt er overflødig. Vi vil komme tilbake til dette når vi skal introdusere begrepet *basis*.

Siden  $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ , er  $\mathbf{v}_3$  en lineærkombinasjon av  $\mathbf{v}_1$  og  $\mathbf{v}_2$ . Vi skriver

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

som kalles en *lineær avhengighetsrelasjon*, og vektorene  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  sies å være *lineært avhengige*.

### Definisjonen av lineær uavhengighet

Vi begynner dette avsnittet med den formelle definisjonen av lineær uavhengighet. Husk at nullvektoren  $\mathbf{0}$  i  $\mathbb{R}^m$  eller  $\mathbb{C}^m$  er vektoren med alle elementer lik 0.

**Definisjon.** Vektorene  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  er *lineært uavhengige* dersom likningen

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

ikke har andre løsninger enn den trivielle løsningen  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ . I motsatt tilfelle kalles de *lineært avhengige*.  $\triangle$

Altså er en mengde med vektorer lineært uavhengig dersom det å velge alle vektorer lik null er den eneste måten å uttrykke 0-vektoren som en lineærkombinasjon av vektorene.

**Eksempel 5.1.** La

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

i  $\mathbb{R}^3$ . Ligningen

$$\mathbf{v}_1x_1 + \mathbf{v}_2x_2 = \mathbf{0}$$

medfører at  $3x_1 = 0$  og  $4x_2 = 0$ , altså  $x_1 = x_2 = 0$ , så den har bare den trivielle løsningen. Dermed er  $\mathbf{v}_1$  og  $\mathbf{v}_2$  lineært uavhengige.  $\triangle$

**Eksempel 5.2.** La  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  og  $\mathbf{w}$  være følgende tre vektorer i  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Disse vektorene oppfyller følgende likhet (det er lett å sjekke):

$$\mathbf{u} + 5 \cdot \mathbf{v} - 9 \cdot \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

og er derfor lineært avhengige.  $\triangle$

**Eksempel 5.3.** La  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  og  $\mathbf{w}$  være følgende tre vektorer i  $\mathbb{C}^3$ :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4i \\ 4i \\ 9i \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -i \\ -i \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Disse vektorene oppfyller følgende likhet:

$$-i\mathbf{u} + 5i \cdot \mathbf{v} - 9 \cdot \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

og er derfor lineært avhengige.  $\triangle$

**Teorem 5.4.** *Enhver mengde av vektorer  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  som inneholder nullvektoren, er lineært avhengig.*

*Bevis.* Anta at  $\mathbf{v}_t = \mathbf{0}$ . Velg  $a_t = 1$  og  $a_j = 0$  for  $j \neq t$ . Da er  $\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ , og mengden er derfor lineært avhengig.  $\square$

## Lineær uavhengighet for to vektorer

Hvis vi ser på bare to vektorer, er det ikke vanskelig å sjekke om de er lineært uavhengige eller ikke.

**Eksempel 5.5.** La

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ -12 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Vi har  $\mathbf{v}_1 = 2 \cdot \mathbf{v}_2$ , og får:

$$1 \cdot \mathbf{v}_1 - 2 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

Vektorene  $\mathbf{v}_1$  og  $\mathbf{v}_2$  er altså lineært avhengige.  $\triangle$

I dette eksempelet hadde vi at den ene vektoren kunne skrives som et tall ganger den andre, og ut fra det fant vi at vektorene var lineært avhengige. Dette holder generelt.

**Teorem 5.6.** *To vektorer  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$ , begge ulik  $\mathbf{0}$ , er lineært uavhengige hvis og bare hvis  $\mathbf{u} \neq c\mathbf{v}$ , for en skalar  $c \neq 0$ .*

*Bevis.* Påstanden i teoremet kan omformuleres slik: Vektorene er lineært *avhengige* hvis og bare hvis  $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$ , for en skalar  $c \neq 0$ . Vi viser dette.

Anta først at  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  er lineært avhengige. Da finnes to tall  $a$  og  $b$  slik at

$$\mathbf{u} \cdot a + \mathbf{v} \cdot b = \mathbf{0}$$

og minst én av  $a$  og  $b$  er ulik 0. Hvis  $a = 0$ , har vi  $\mathbf{v} \cdot b = \mathbf{0}$ , og dermed, ved å dele på  $b$  (som er ulik 0) får vi  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Dette er en motsigelse. Så  $a \neq 0$ . Av samme grunn må vi ha  $b \neq 0$ .

Dermed får vi

$$\mathbf{u} = -\frac{b}{a}\mathbf{v}.$$

og siden  $b \neq 0$  har vi altså at  $\mathbf{u}$  er en ikke-null skalar ganger  $\mathbf{v}$ .

Nå viser vi den motsatt implikasjonen. Anta derfor  $\mathbf{u} = c \cdot \mathbf{v}$  for en skalar  $c$ , da får vi:

$$\mathbf{u} \cdot 1 + \mathbf{v} \cdot (-c) = \mathbf{0}.$$

og det betyr at vektorene er lineært avhengige.  $\square$

Hvis vi ser på vektorer i  $\mathbb{R}^2$  eller  $\mathbb{R}^3$ , sier altså teoremet at to vektorer er lineært uavhengige hvis og bare hvis de ikke ligger på en rett linje gjennom origo. Med andre ord: de er lineært uavhengige hvis og bare hvis de utspenner et plan.

## Hvordan sjekke lineær uavhengighet?

For å sjekke om vektorer  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  er lineært uavhengige, trenger vi å finne løsninger

$$\mathbf{v}_1 \cdot x_1 + \mathbf{v}_2 \cdot x_2 + \dots + \mathbf{v}_n \cdot x_n = \mathbf{0}$$

Denne likningen kan vi selvfølgelig løse på vanlig måte, ved å gausseliminere totalmatrisen:

$$[ \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n \mid \mathbf{0} ]$$

**Eksempel 5.7.** Er disse vektorene lineært uavhengige?

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 8 \\ 31 \\ 12 \\ 22 \end{bmatrix}$$

Vi setter opp totalmatrisen for likningssystemet

$$\mathbf{u} \cdot x + \mathbf{v} \cdot y + \mathbf{w} \cdot z = \mathbf{0},$$

og gausseliminerer den:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 8 & 0 \\ 9 & 7 & 31 & 0 \\ 3 & 2 & 12 & 0 \\ 3 & 4 & 22 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Vi kunne fortsatt videre til redusert trappeform, men allerede her er det tydelig at vi får kun én løsning:  $x = y = z = 0$ . Dette betyr at vektorene  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  og  $\mathbf{w}$  er lineært uavhengige.  $\triangle$

Det essensielle vi trenger å få ut av gausseliminasjonen for å sjekke lineær uavhengighet, er om det blir noen frie variabler eller ikke. Merk også at vi ikke egentlig trenger å ta med høyresidevektoren i gausseliminasjonen. I og med at det er bare 0-er der fra begynnelsen av, kan det aldri bli noe annet enn 0 der, uansett hvilke radoperasjoner vi utfører. Altså er påstand 1 og 4 i det følgende teoremet ekvivalente.

**Teorem 5.8.** *La  $A$  være en matrise. Følgende påstander er ekvivalente:*

1. *Kolonnene i  $A$  er lineært uavhengige.*
2. *Likningen  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  har bare den trivielle løsningen  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .*
3. *Vi får ingen frie variabler når vi løser  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .*
4. *Når vi gausseliminerer  $A$ , får vi et pivotelement i hver kolonne.*

*Bevis.* Påstand 2 er bare en omskrivning av definisjonen av lineær uavhengighet til en matriselikning. Påstand 3 forklarer hvordan vi kan se at likningen  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  ikke har mer enn én løsning (husk at vi vet at den alltid har  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  som løsning). Påstand 4 er en omformulering av påstand 3, der vi utnytter at vi vet at den siste kolonnen i totalmatrisen uansett bare består av 0-er, så vi trenger ikke ta den med i gausseliminasjonen.  $\square$

Teorem 5.8 gir oss en grei metode for å sjekke lineær uavhengighet. Hvis vi har vektorer

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n,$$

kan vi finne ut om de er lineært uavhengige på denne måten:

1. Lag en matrise  $A = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n]$  med disse vektorene som kolonner.
2. Gausseliminer  $A$  til trappeform.
3. Hvis hver kolonne inneholder et pivotelement, er vektorene lineært uavhengige. Ellers er de lineært avhengige.

**Eksempel 5.9.** Er disse vektorene lineært uavhengige?

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Vi gausseliminerer matrisen  $[\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3]$ :

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 10 & 7 & 6 \\ 5 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Siste kolonne har ikke noe pivotelement. Dermed er  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  og  $\mathbf{v}_3$  lineært avhengige.  $\triangle$

**Eksempel 5.10.** Hva med disse?

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 8i \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & -1 \\ -2i & 8i & -5 \end{bmatrix}$$

er ferdig gausseliminert, bare i motsatt rekkefølge av hva du er vant med, og har pivotelement i hver kolonne. Dermed er  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  og  $\mathbf{v}_3$  lineært uavhengige.  $\triangle$

**Eksempel 5.11.** Er disse vektorene lineært uavhengige?

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 14 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix}$$

For å sjekke dette kan vi gausseliminerer denne matrisen:

$$\begin{bmatrix} 8 & 14 & 3 & 7 \\ 7 & -2 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

Men vi trenger ikke egentlig å utføre gausselimineringen. Vi ser med en gang at uansett hva som skjer, så kan vi ikke få mer enn tre pivotelementer (ett i hver rad). Dermed kan det ikke bli pivotelementer i alle de fire kolonnene, så vektorene  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  og  $\mathbf{v}_4$  er lineært avhengige.  $\triangle$

Vi trenger altså ikke alltid å gausseliminerer for å finne ut om vektorer er lineært uavhengige eller ikke. Noen ganger kan vi se det på enklere måter.

Vi lister opp noen forskjellige betingelser som kan være nyttige å se etter for å oppdage at vektorer er lineært avhengige.

**Teorem 5.12.** Gitt  $n$  vektorer  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  i  $\mathbb{R}^m$  eller  $\mathbb{C}^m$ . Hvis

1. en av vektorene er en lineærkombinasjon av de andre, eller
2.  $n > m$ ,

så er vektorene lineært avhengige.

*Bevis.* Anta først at én vektor  $\mathbf{v}_k$  er en lineærkombinasjon av de andre:

$$\mathbf{v}_k = \sum_{i \neq k} a_i \mathbf{v}_i$$

Da kan vi sette  $a_k = -1$  og få:

$$\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

Her har vi skrevet nullvektoren som en ikke-triviell lineærkombinasjon av vektorene våre (vi vet ikke hva alle  $a_i$ -ene er, men vi vet i hvert fall at én av dem,  $a_k$ , ikke er 0). Det betyr at vektorene er lineært avhengige.

Anta nå at  $n > m$ . Akkurat som i eksempel 5.11 får vi her at når vi gausseliminerer matrisen

$$[\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n],$$

så får vi maksimalt  $m$  pivotelementer (ett i hver rad), og vi trenger  $n$  pivotelementer (ett i hver kolonne) for at vektorene skal være lineært uavhengige. Siden  $n > m$ , er det umulig, så da er vektorene lineært avhengige.  $\square$

Den første betingelsen i teorem 5.12 er ikke bare tilstrekkelig for å få lineær uavhengighet, den er ekvivalent med at vektorene er lineært avhengige. Vi viser dette også.

**Teorem 5.13.** Vektorene  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  er lineært uavhengige hvis og bare hvis ingen av dem kan skrives som en lineærkombinasjon av de andre.

*Bevis.* Påstanden i teoremet er det samme som å si at vektorene er lineært avhengige hvis og bare hvis en av dem kan skrives som en lineærkombinasjon av de andre.

I teorem 5.12 viste vi at dersom en av vektorene er en lineærkombinasjon av de andre, så er de lineært avhengige. Det gjenstår å vise at dersom vektorene er lineært avhengige, så er en av dem en lineærkombinasjon av de andre.

Anta at vektorene er lineært avhengige, altså at vi har

$$a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \dots + a_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0},$$

der minst én av  $a_i$ -ene er ulik 0. Velg en  $k$  slik at  $a_k \neq 0$ . Da har vi:

$$a_k \mathbf{v}_k = \sum_{i \neq k} (-a_i) \mathbf{v}_i$$

Siden  $a_k \neq 0$  kan vi dele på  $a_k$  og få:

$$\mathbf{v}_k = \sum_{i \neq k} \frac{-a_i}{a_k} \cdot \mathbf{v}_i$$

Dermed er vektoren  $\mathbf{v}_k$  en lineærkombinasjon av de andre vektorene i listen.  $\square$

### Like mange vektorer som dimensjonen

Til slutt ser vi på hva vi kan si om lineær uavhengighet hvis vi ser på  $n$  vektorer i  $\mathbb{R}^n$ . Nå har vi altså like mange vektorer som dimensjonen til rommet vektorene bor i.

Hvis vi har to ulike vektorer i  $\mathbb{R}^2$ , så kan vi skille mellom følgende to tilfeller:

1. Minst én av vektorene er ulik  $\mathbf{0}$ , og vektorene ligger på samme linje. Da utspenner de denne linjen, og de er lineært avhengige.
2. Vektorene ligger ikke på samme linje, de peker altså i hver sin retning. Da utspenner de hele planet, og de er lineært uavhengige.

Hvis vi har tre ulike vektorer i  $\mathbb{R}^3$ , så kan vi skille mellom tre tilfeller:

1. Vektorene ligger på samme linje. Da utspenner de denne linjen, og de er lineært avhengige.
2. Vektorene ligger ikke på samme linje, men det finnes et plan i  $\mathbb{R}^3$  som inneholder alle tre. Da utspenner de dette planet, og de er lineært avhengige.
3. Vektorene ligger ikke i samme plan. Da utspenner de hele  $\mathbb{R}^3$ , og de er lineært uavhengige.

Generelt har vi at  $n$  vektorer i  $\mathbb{R}^n$  enten er lineært avhengige og utspenner en mengde som er mindre enn  $\mathbb{R}^n$ , eller så er de lineært uavhengige og utspenner hele  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorem 5.14.** *Hvis vi har  $n$  vektorer  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  i  $\mathbb{R}^n$ , så er de lineært uavhengige hvis og bare hvis de utspenner hele  $\mathbb{R}^n$ , altså hvis og bare hvis*

$$\text{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\} = \mathbb{R}^n.$$

*Bevis.* La

$$A = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n]$$

være  $n \times n$ -matrisen med vektorene våre som kolonner. Vi vet at vektorene er lineært uavhengige hvis og bare hvis vi får pivotelementer i alle kolonner når vi gausseliminerer  $A$ . Men siden  $A$  er kvadratisk, er dette det samme som at vi får pivotelementer i alle rader. Det er igjen ekvivalent med at

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

har løsning for alle vektorer  $\mathbf{b}$  i  $\mathbb{C}^n$ , som er det samme som at kolonnene i  $A$  utspenner  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

Vi formulerte teorem 5.14 for  $\mathbb{R}^n$ . Akkurat samme teorem og bevis holder for  $\mathbb{C}^n$ .

**Eksempel 5.15.** Hva med vektorene

$$\begin{bmatrix} 1-i \\ i \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 1+2i \end{bmatrix} \quad ?$$

Vi løser likningssystemet

$$\begin{aligned} (1-i)z + 3w &= 0 \\ iz + (1+2i)w &= 0 \end{aligned}$$

som har totalmatrise

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1-i & 3 & 0 \\ i & 1+2i & 0 \end{array} \right].$$

Gausseliminering gir

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1-i & 3 & 0 \\ 0 & 3-2i & 0 \end{array} \right]$$

som gir  $z = w = 0$ , og følgelig er vektorene lineært uavhengige. De utspenner dermed også  $\mathbb{C}^2$ .  $\triangle$