Løsningsforslag øving 1

1.1.

a) Siden $1+\sqrt{3}i$ ligger i første kvadrant, kan vi skrive

$$\theta = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3},$$

og

$$1+\sqrt{3}i = 2e^{\frac{\pi}{3}i}.$$

Vi beregner så

$$(1+\sqrt{3}i)^7 = 2^7 e^{\frac{7\pi}{3}i} = 128e^{\frac{\pi}{3}i}.$$

b) Siden $1+i$ ligger i første kvadrant og danner vinkelen $\pi/4$ med den reelle aksen, kan vi skrive

$$1+i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}.$$

Vi beregner

$$(1+i)\cdot(1+\sqrt{3}i) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\cdot 2e^{\frac{\pi}{3}i} = 2\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{12}i}$$

c) Vi beregner

$$(1+i)/(1+\sqrt{3}i) = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}}{2e^{\frac{\pi}{3}i}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{-\pi}{12}i}$$

d) De to neste er grei å ta på kartesisk form:

$$(1+2i)\cdot(1-2i) = 1+4 = 5$$

(Merk at dette er det samme som $|1+2i|^2$.)

e)

$$\frac{1+2i}{1-2i} = \frac{(1+2i)^2}{1^2+2^2} = \frac{1}{5}(-3+4i)$$

1.2. Husk at det finnes en oppskrift på å finne n-terøttene til w:

1. Skriv w på polar form $w = re^{i(\theta+2\pi k)}$ (alle heltall k gir samme komplekse tall siden du ender samme sted selv om du går k hele sirkler rundt origo før du stopper).
2. Røttene er

$$\sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi}{n}k)}.$$

3. Det er egentlig bare n ulike komplekse tall her. Vi velger fjerne $k = 0, 1, \dots, n-1$, fordi det er vanlig (men du kan starte på hvilken som helst k_0 og velge $k_0, k_0+1, k_0+2, \dots k_0+(n-1)$):

$$\sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi}{n}k)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Avmerking: Husk at polar form $re^{i\theta}$ forstås som det komplekse tallet med lengde r og vinkel θ. Dermed kan tallene i punkt 3. enkelt skisséres i det komplekse planet.

a) Den kjente og kjære abc-formelen gir $\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{19}i)$. Disse tallene er på kartesisk form og kan plottes som $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{19}}{2})$ og $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{19}}{2})$ i det komplekse planet.

b) Her er $w = 2i$. Tallet $2i$ ligger på den positive delen av den imaginære aksen. Derfor er vinkelen $\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$. Lengden er $r = \sqrt{0^2+2^2} = 2$. Innsatt i formelen ovenfor:

$$\sqrt[3]{2}e^{\frac{\pi}{6}i}, \sqrt[3]{2}e^{\frac{5\pi}{6}i}, \sqrt[3]{2}e^{9\frac{\pi}{6}i}.$$

c) Tallet 2 ligger på den positive reelle aksen. Derfor er vinkelen $0+2\pi k$. Lengden er $r = \sqrt{2^2+0^2} = 2$. Innsatt i formelen ovenfor:

$$\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2}e^{\frac{\pi}{2}i}, \sqrt[4]{2}e^{\pi i}, \sqrt[4]{2}e^{\frac{3\pi}{2}i}.$$

d) Tallet $2+2i = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ ligger på linjen $x = y$ i det komplekse planet. Derfor skjønner vi at vinkelen er $\theta = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$. Lengden er $r = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2^{\frac{3}{2}}$. Innsatt i formelen ovenfor:

$$2^{\frac{3}{10}}e^{\frac{\pi}{20}i}, 2^{\frac{3}{10}}e^{\frac{9\pi}{20}i}, 2^{\frac{3}{10}}e^{\frac{17\pi}{20}i}, 2^{\frac{3}{10}}e^{\frac{25\pi}{20}i}, 2^{\frac{3}{10}}e^{\frac{33\pi}{20}i}$$

1.3. Vi skriver hvert uttrykk på kartesisk form:

a)

$$\begin{aligned}
z^4 = (a+ib)^4 &= (a+ib)^2(a+ib)^2 \\
&= (a^2+2iab+i^2b^2)(a^2+2iab+i^2b^2) \\
&= (a^2-b^2+2iab)^2 \\
&= (a^2-b^2)^2 + 2(a^2-b^2)(2iab) + 4i^2a^2b^2 \\
&= (a^4-6a^2b^2+b^4) + 4i(a^3b-ab^3)
\end{aligned}$$

Dette betyr at vi har realdel $a^4-6a^2b^2+b^4$ og imaginærdel $4(a^3b-ab^3)$.

b)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} &= \frac{1(a-ib)}{(a+ib)(a-ib)} \\
&= \frac{a-ib}{a^2+b^2} \\
&= \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}
\end{aligned}$$

Realdel: $\frac{a}{a^2+b^2}$.
Imaginærdel: $\frac{-b}{a^2+b^2}$.

c)

$$\begin{aligned}\frac{z-1}{z+1} &= \frac{a+ib-1}{a+ib+1} = \frac{(a-1)+ib}{(a+1)+ib} \\ &= \frac{((a-1)+ib)((a+1)-ib)}{((a+1)+ib)((a+1)-ib)} \\ &= \frac{(a-1)(a+1)-ib(a-1)+ib(a+1)-i^2b^2}{(a+1)^2+b^2} \\ &= \frac{(a^2+b^2-1)+2ib}{(a+1)^2+b^2} \\ &= \frac{a^2+b^2-1}{(a+1)^2+b^2}+i\frac{2b}{(a+1)^2+b^2}\end{aligned}$$

Realdel: $\frac{a^2+b^2-1}{(a+1)^2+b^2}$.
Imaginærdel: $\frac{2b}{(a+1)^2+b^2}$.

d)

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2} &= \frac{1}{(a+ib)^2} = \frac{1}{(a^2-b^2)+2iab} \\ &= \frac{(a^2-b^2)-2iab}{((a^2-b^2)+2iab)((a^2-b^2)-2iab)} \\ &= \frac{a^2-b^2}{((a^2-b^2)^2+(2ab)^2}+i\frac{-2ab}{((a^2-b^2)^2+(2ab)^2} \\ &= \frac{a^2-b^2}{a^4+2a^2b^2+b^4}+i\frac{-2ab}{a^4+2a^2b^2+b^4}\end{aligned}$$

Realdel: $\frac{a^2-b^2}{a^4+2a^2b^2+b^4}$.
Imaginærdel: $\frac{-2ab}{a^4+2a^2b^2+b^4}$.

1.4. Husk at

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Realdel: $r\cos\theta$.
Imaginærdel: $r\sin\theta$.

1.5.

a) Vi har at $(z-1)^3 = z^3-3z^2+3z-1$ slik at $z=1$ er en trippelrot.
Aletrnativt kan du gjette på løsningen $z=1$ og deretter bruke polynomdivisjon.

b)

Fra **a)** har vi at ligningen kan skrives på formen

$$(z-1)^3 = 1 = e^{2\pi k i}.$$

Vi skal altså finn z slik at $z-1$ er en tredjerot av 1. Metoden beskrevet i oppgave **2.3.** viser at tredjerøttene til 1 er

$$e^{\frac{2\pi}{3}}, \quad e^{\frac{4\pi}{3}}, \quad 1.$$

Dermed har vi tre løsninger for $z-1$ som igjen gir tre løsninger for z:

$$z = 1+e^{\frac{2\pi}{3}}, 1+e^{\frac{4\pi}{3}}, 2.$$

Tredjerøttene til 1 ligger uniformt fordelt på sirekelen sentrert i origo med radius 1, men er forskjøvet til å ligge uniformt fordelt på sirkelen sentrert i $(1,0)$ med radius 1.

1.6. Anta at w er en løsning. Da vet vi at

$$a_n w^n + a_{n-1}w^{n-1} + ... + a_1 w + a_0 = 0.$$

Konjugering av hele ligningen gir

$$\overline{a_n w^n + a_{n-1}w^{n-1} + ... + a_1 w + a_0} = 0.$$

Husk at $\overline{z+w} = \overline{z}+\overline{w}$, slik at:

$$a_n(\overline{w})^n + a_{n-1}(\overline{w})^{n-1} + ... + a_1(\overline{w}) + a_0 = 0.$$

Du skal vise at $(\overline{w})^n = \overline{w^n}$ på innleveringen, slik at

$$a_n\overline{w}^n + a_{n-1}\overline{w}^{n-1} + ... + a_1\overline{w} + a_0 = 0.$$

Dette betyr jo akkurat at $\overline{w}$ er en løsning.

1.7. Ja, la det reelle tallet være 1 som eksempel (dette lar seg lett generalisere). n-terøttene til 1 er løsningene av polynomligningen $z^n = 1$. Forrige oppgave forteller oss at siden polynomet $z^n - 1$ har reelle koeffisienter kommer nullpunktene i konjugatpar.

Vi kan eventuelt argumentere direkte, f.eks som følger: La $z = re^{i\theta}$ tilfredsstille $z^n = 1$. Vi har $r^n * e^{ni\theta} = 1$. Da er $r^n = 1$ og $e^{n*i\theta} = 1$ siden r er et positivt reelt tall, hvilket videre gir $r = 1$. Vi har $\overline{z}^n = r^n e^{-ni\theta} = \left(e^{ni\theta}\right)^{-1} = 1^{-1} = 1$.

1.8.

a) Vi følger den vanlige metoden for å finne n-terøtter: Skriv 1 på polar form; $1 = e^{(2\pi k)i}$, k et heltall. Tredjerøttene til 1 er $e^{(\frac{2\pi k}{3})i}$, k heltall. Dette gir ulike komplekse tall for $k = 0,1,2$:

$$1, \quad e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad e^{\frac{4\pi i}{3}}.$$

Dette er tre punkter uniformt fordelt på sirkelen sentrert i origo med radius 1. Dersom vi trekker rette linjer mellom punkter etter økende vinkel får vi en trekant med røttene som hjørner.

b) Fjerderøttene er på formen $e^{i\cdot\frac{2\pi k}{4}}$ for k et heltall. Vi tar $k = 0,1,2,3$ og får

$$1, \quad i, \quad -1, \quad -i.$$

Den geometriske figuren blir et kvadrat med hjørner i røttene.

c) Vi får at n-terøttene er $e^{i\frac{2\pi k}{n}}$ hvor $k = 0,1,\cdots,n-1$. Altså:

$$1, \quad e^{\frac{2\pi i}{n}}, \quad e^{\frac{4\pi i}{n}}, \dots, e^{\frac{(n-1)\pi i}{n}}.$$

Den geometriske figuren blir en regulær n-gon med hjørner i røttene.

1.9. Skriv tallene på polarform, $z = r\cdot e^{i\theta}$, $w = \rho\cdot e^{i\phi}$, hvor $r \neq 0 \neq \rho$. Vi får $z\cdot w = r\cdot\rho\cdot e^{i(\theta+\phi)} \neq 0$ siden $r\cdot\rho \neq 0$.

1.10. Med ulikheten fra oppgaveteksten kan vi beregne slik:

$$\begin{aligned}|z+w|^2 &= |z|^2+|w|^2+2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}) \\ &\leqslant |z|^2+|w|^2+2|z||w| \\ &= (|z|+|w|)^2\end{aligned}$$

Så tar vi kvadratroten.

Eksamensoppgaver

Høst 2017: Oppgave 1
Vår 2018: Oppgave 1
Kont 2018: Oppgave 1
Kont 2019: Oppgave 1