Løsningsforslag øving 2

2.1. Systemet skrevet på matriseform er

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 28 & -2 \\ -1 & 1 & -7 & -31 \\ 1 & 2 & -14 & 64 \end{array}\right]$$

Vi radreduserer matrisen:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 28 & -2 \\ -1 & 1 & -7 & -31 \\ 1 & 2 & -14 & 64 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 42 \\ 0 & 1 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Rad 1 gir oss direkte at $x = 42$. Rad 3 betyr

$$0x + 0y + 0z = 0$$

eller $0 = 0$. Denne gir med andre ord ingen krav til hva x, y og z må være. Vi får en fri variabel $z = t$, der t er et reelt tall (kan like gjerne velge y som den frie variabelen). Med $z = t$ gir rad 2 oss at $y = 11 + 7t$.

2.2. Matrise (a), (c) og (d) er på trappeform; (a) er på redusert trappeform.

2.3. Metode: gausseliminasjon.

a) Radreduser totalmatrisen til systemet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Nederste ligning betyr

$$0x + 0y + 0z = 4,$$

eller $0 = 4$. Dette er ikke sant: Ingen løsning.

b) Radreduserer totalmatrisen til systemet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Dette er akkurat samme ligninger som vi reduserer til i del **c)**, og derfor har vi like løsninger:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

c) Vi gausseliminerer på vanlig måte. Merk at det er litt vanskeligere å dele komplekse tall (vi må gange nevner og teller med nevner konjugert). Bytt rad en med rad to:

$$\begin{bmatrix} i & 1 & -1 \\ 1 & i & i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & i & i \\ i & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Legg til rad en multiplisert med $-i$ til rad to:

$$\begin{bmatrix} 1 & i & i \\ i & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & i & i \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Del rad to på 2, legg til rad to multiplisert med $-i$ til rad en:

$$\begin{bmatrix} 1 & i & i \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Løsning: $z = i$, $w = 0$, hvor vi har valgt å kalle første variabel for z og andre for w.

d) Bytt rad en med rad to:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ i & 1 & 1 & 1+i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} i & 1 & 1 & 1+i \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Del rad en med i, det vil si gang den med $-i$:

$$\begin{bmatrix} i & 1 & 1 & 1+i \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -i & -i & 1-i \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Legg til rad to multiplisert med i til rad 1

$$\begin{bmatrix} 1 & -i & -i & 1-i \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi kaller variablene z, w og u, og lar $u = t$ være fri siden kolonnen dens ikke inneholder noe pivotelement. Nederste rad betyr $0z + w + u = 1$, så $w = 1 - t$. Rad 1 gir $z = 1$.

2.4.

a) Vi setter det homogene systemet inn i en utvidet matrise, og Gauss-eliminerer:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -6 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{15}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Tredje variabel blir fri, vi setter den som $x_3 = t$. Da tvinger ligningen i andre rad x_2 til å bli lik $3t$, og første rad gir $x_1 = t$ Vi ender opp med løsningen

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} t, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

I neste ligningssett, det inhomogene, får vi et nesten identisk system, med unntakk av fjerde kolonne:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -6 & 4 \\ 4 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{15}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Igjen får vi (som forventet) fri tredjevariabel, som vi setter som $x_3 = t$. Da gir andre rad at $x_2 = 1+3t$, og første rad at $x_1 = 1 + t$. På vektorform er løsningen

$$x = \begin{bmatrix} 1+t \\ 1+3t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} t, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Vi ser at dette er en linje i $\mathbb{R}^3$, parametrisert av variabelen t, som er parallell med løsningslinjen fra forrige ligningssystem (klarer du å gi et argument for at de to linjene ikke er den samme, bare beskrevet på to forskjellige måter?).

Det er dette vi forventer i ligningssystemer som tillater uendelig mange løsninger: Da blir løsningsmengden til systemet $A\vec{x} = \vec{b}$ enten tom, eller gitt ved ett enkelt punkt som ligger i løsningen (i vårt tilfelle vektoren $[1, 1, 0]^T$) pluss alle vektorer som løser det homogene systemet $A\vec{x} = 0$ (altså de vi fant aller først). Dette er fordi at hvis $A\vec{v} = \vec{b}$ og $A\vec{w} = 0$, så vil $A(\vec{v} + \vec{w}) = A\vec{v} + A\vec{w} = \vec{b} + 0 = \vec{b}$.

Legg merke til at hvis det homogene systemet kun hadde hatt én løsning (som da alltid må være nullvektoren, siden den automatisk løser $A\vec{x} = 0$), så hadde det ikke hatt noe å si å legge den til andre løsninger, fordi $\vec{v} + t\vec{0} = \vec{v}$. Da hadde vi altså fått én enkelt løsning til det inhomogene systemet, og ikke en hel linje.

b) Vi må med andre ord finne en vektor $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3]^T$ slik at systemet $A\vec{x} = \vec{b}$ ikke kan løses, der

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -6 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Det skjer hvis og bare hvis vi får en umulig ligning i det Gauss-eliminerte systemet vårt. Det er mange muligheter her, men vi legger merke til at tredje rad i matrisene våre, som representerer $4x - 2y + 2z$, er 2 ganger første rad (den forsvant med én gang da vi Gauss-eliminerte tidligere). I oppgave a) gikk dette fint fordi også fjerde kolonne fikk 0 i tredje rad, men hva hvis vi prøver oss med en $\vec{b}$ der b_3 ikke er lik $2b_1$? For å gjøre det enklest mulig kan vi for eksempel ta $\vec{b} = [0, 0, 1]^T$, og observerer

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -6 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{15}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Her har vi allerede en selvmotsigelse i tredje rad, for ingen verdier kan løse $0x + 0y + 0z = 1$. Altså er $\vec{b} = [0, 0, 1]^T$ et gyldig eksempel (men der er mange andre!).

2.5.

La 1 betegne mulig og 0 umulig:

	$m < n$	$m = n$	$m > n$
ingen løsninger	1	1	1
én løsning	0	1	1
uendelig mange løsninger	1	1	1

Forklaring: I hvert tilfelle må vi enten finne et eksempel (i så fall er det jo mulig – vi fant et eksempel!), eller forklare hvorfor det ikke er mulig å finne et eksempel.
Ingen løsning: Uavhengig av hvor mange ligninger og ukjente vi skal ha kan vi lage et eksempel hvor en av ligningene sier $0 = 1$. Dette korresponderer til parallelle linjer/plan/rom med ingen felles punkter.
Uendelig mange løsninger: Vi må forsikre oss om at vi kan få til en fri variabel i hvert tilfelle. I tilfellet $m < n$ kan vi ta 1x2 systemet $x + y = 0$, hvor y er fri. For $m = n$ kan vi legge til ligningen $0 = 0$ slik at vi har to ligninger med to ukjente, og y er stadig fri. Skal vi ha flere ligninger enn ukjente kan vi legge til ligningen $0 = 0$ nok en gang.
én løsning: For $m = n$ kan vi ta ligningssystemet $x = 1$, det har en unik løsning. Dersom du ikke synes det er et skikkelig system kan du slenge på $y = 1$. For å få ett eksempel hvor $m > n$ legger vi til ligningen $0 = 0$. Men nå må vi tenke oss om, hva skjer om vi har flere ukjente enn ligninger? Vi setter opp totalmatrisen til systemet, denne er lengre enn den er høy siden vi har flere ukjente enn ligninger. Dermed kan vi ikke ha pivotelement i hver kolonne. Hver kolonne som ikke har et pivotelement gir en fri variabel. Dermed har systemet enten ingen, eller uendelig mange løsninger.

2.6. I denne oppgaven må vi Gauss-eliminere vanlig, og se på de forskjellige tilfellene som oppstår. Det første steget i denne prosessen vil være å dele nederste rad på b, såfremt b ikke er lik 0. Vi begynner altså med å se på tilfellet $b \neq 0$. Da får vi:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & b & c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 & \frac{c}{b} \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c - \frac{c}{b} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{c}{b} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -a(c - \frac{c}{b}) \\ 0 & 1 & 0 & c - \frac{c}{b} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{c}{b} \end{array}\right]$$

Vi leser svarvektoren direkte av,

$$x = \begin{bmatrix} -a(c - \frac{c}{b}) \\ c - \frac{c}{b} \\ \frac{c}{b} \end{bmatrix}.$$

Men vi har ennå ikke funnet ut hva som skjer når $b = 0$, så det tar vi som spesialtilfelle:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{array}\right]$$

Det første vi observerer er at tilfellet $c \neq 0$ gir oss en umulighet i nederste rad, så tilfellet $b = 0, c \neq 0$ har ingen løsning.

Siste mulighet er da $b = 0 = c$. Den reduserte utvidede matrisen vi fant har da en fri variabel i tredje kolonne, og vi leser av løsningen

$$x = \begin{bmatrix} a \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Altså uendelig mange løsninger, parametrisert av t.

2.7.

a) Alle radoperasjoner er reversible; multiplisere en rad med et ikke-null tall c kan reverseres ved å multiplisere samme rad med $\frac{1}{c}$; bytte om på to rader kan reverseres ved å bytte om på radene igjen; å legge til et multiplum av en rad til en annen kan reverseres ved å trekke fra det som ble lagt til. Dersom $M \sim N$ betyr det at vi har gjort et endelig antall radoperasjoner $\mathrm{O}_1, \dots, \mathrm{O}_n$ for å lage N fra M. La O_i' være den reverse radoperasjonen til O_i. Da vet vi at $\mathrm{O}_1', \dots, \mathrm{O}_n'$ kan brukes for å lage M fra N. Dette betyr at $N \sim M$.

b) Vi antar at $M \sim L$ og $L \sim N$. Med andre ord finnes det et endelig antall radoperasjoner $\mathrm{O}_1, \dots, \mathrm{O}_n$ som lager L fra M, og at det finnes et endelig antall radoperasjoner $\mathrm{O}_{n+1}, \dots, \mathrm{O}_{n+m}$ som lager N fra L. Men da kan vi jo starte med M og bruke alle radoperasjonene for å lage N fra M. Dette betyr at $M \sim N$.

2.8. Vi rydder kolonne 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & z & z^2 & 0 & 0 \\ 1 & z^2 & z & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & z-1 & z^2-1 & -3 & -9 \\ 0 & z^2-1 & z-1 & -3 & -9 \end{bmatrix}$$

Nå bruker vi at $z^2 - 1 = -z - 2$, som holder pga. antagelsen om z.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & z-1 & -z-2 & -3 & -9 \\ 0 & -z-2 & z-1 & -3 & -9 \end{bmatrix}$$

Legg rad 4 til rad 3:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -6 & -18 \\ 0 & -z-2 & z-1 & -3 & -9 \end{bmatrix}$$

Del rad 3 på -3, og legg $z + 2$ av nye rad 3 til rad 4:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2z+1 & 2z+1 & 6z+3 \end{bmatrix}$$

Del rad 4 på $2z + 1$ og bytt litt plass på radene:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Vi ser at $w = 2$, $z = 1$, $y = 1$ og $x = 1$.

2.9. Dersom man legger sammen ligning to og tre, får man ligningen $2x + 2y = 6$, som er inkonsistent med ligningen $x + y = 0$. Derfor har ligningssystemet ingen løsning.

Eksamensoppgaver

Vår 2018: Oppgave 2a
Vår 2019: Oppgave 1b