Løsningsforslag øving 3

3.1.

a)

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-1\\2+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\mathbf{u}-2\mathbf{v}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3/2\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7/2\\-1\end{bmatrix}$$

3.2. Her kan vi for eksempel prøve å finne a, b slik at

$$a\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}.$$

Dette gir et ligningssystem med totalmatrise

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&2\end{bmatrix}.$$

Med andre ord kan vi skrive $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ som

$$\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}=-1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}.$$

3.3. Her er det mange løsninger og mange måter å gjøre det på. Én løsning er å regne ut kryssproduktet av de to vektorene. En annen er å finne en vektor (x, y, z) slik at det *ikke* finnes a, b slik at

$$a\cdot(1,5,-3)+b\cdot(4,18,4)=(x,y,z).$$

Hvis vi nå lar $x=y=0$, får vi ligningene

$$\begin{aligned}a+4b&=0\\5a+18b&=0,\end{aligned}$$

hvor eneste mulighet er at $a=b=0$. Men vi har også at $-3a+4b=z$, så hvis $x=y=0$ må som sagt $a=b=0$, men da må også $z=0$. Dermed kan vi velge for eksempel vektoren $(0,0,1)$ som løsning på oppgaven.

3.4. Her kan vi for eksempel summere de to vektorene eller skalere en av dem.

3.5. I (a) har vi planet hvor første koordinat er null. Kall det gjerne yz planet. I (b) er alle vektorene lineært avhengige, utspennet er linjen i yz-planet hvor $y=z$. Vektorene i (c) spenner ut hele $\mathbb{R}^3$. En måte å se det på er å legge merke til at alle vektorene i standardbasisen lar seg uttrykke som lineærkombinasjoner av de tre.

4.1.

a) Gir ikke mening.

b) $\begin{bmatrix}-36&7&13\\-24&0&6\end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix}-38&3&9\\14&11&5\\-16&-8&-36\end{bmatrix}$

d) Gir ikke mening.

e) Gir ikke mening.

f) $\begin{bmatrix}-11\\26\\-68\end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix}-290\\-192\end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix}1&0\\2&0\\5&3\end{bmatrix}$

i) 69

4.2. Legger man merke til at en løsning er gitt ved $(-1,1,0)$ og at $(1,-2,1)$ ligger i nullrommet til A kan man hoppe rett til den generelle løsningen:

$$\begin{bmatrix}-1+t\\1-2t\\t\end{bmatrix}$$

Gausseliminasjon fungerer selvsagt også. Vi setter opp totalmatrisen og radreduserer:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\2&3&4&1\\3&4&5&1\\4&5&6&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\0&-1&-2&-1\\0&-2&-4&-2\\0&-3&-6&-3\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\0&1&2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-1\\0&1&2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

Dermed får vi en fri variabel $z=t$ der $t\in\mathbb{R}$. Andre rad gir $y=1-2t$ og første rad gir $x=-1+t$.

4.3. $A\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ er den første kolonnen til A, mens $A\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ er summen av kolonnene til A. Vi har altså

$$A=\begin{bmatrix}3&x\\5&y\end{bmatrix}$$

hvor $3 + x = -1$ og $5 + y = 0$.

4.4.

a) Vi setter identitetsmatrisen ved siden, og bruker Gauss-Jordan for å skrive matrisen på redusert trappeform:

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{-7}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

slik at inversen er

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{-7}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

b) Samme fremgangsmåte som i a) gir inversen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.5. Vektoren må være på formen $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ hvor a og b er reelle tall. Konstanten c kan være 0 eller 1. For $c = 1$ må $b = 0$ men vi kan velge a fritt. Dette svarer geometrisk til at vektorer som kun har komponent langs y-aksen blir null-vektoren ved multiplikasjon med A. For $c = 0$ må $a = 0$ men vi kan velge b fritt. Dette svarer geometrisk til at vektorer som kun har komponent langs x-aksen ikke påvirkes av multiplikasjon med A.

Hint: Vi ønsker at $A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, som gir likningene $a = c \cdot a$ og $0 = b \cdot c$. Det er nå to muligheter: 1) $c = 1$ og $b = 0$, eller 2) $c = 0$ og $a = 0$.

Eksamensoppgaver

Høst 2012: Oppgave 3
Vår 2018: Oppgave 4ab
Høst 2018: Oppgave 5
Vår 2019: Oppgave 6 (første del)