Løsningsforslag øving 5

7.1. For å avgjøre om en delmengde $U \subseteq V$ av et vektorrom V er et underrom, må vi sjekke følgende (Teorem 7.9):

1. Nullvektoren $\mathbf{0}$ ligger i U.
2. For alle vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i U, ligger summen $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ i U.
3. For alle vektorer $\mathbf{u}$ i U og alle skalerer c ligger skalarproduktet $c\mathbf{u}$ i U.

a) M er ikke et underrom av $\mathbb{R}$. For eksempel er

$$(-1) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dette er en vektor som ikke tilfredsstiller $a \geq 0$.

b) Ja, dette er et underrom. La oss sjekke de tre punktene over.

1. La $x = y = z = 0$. Da har vi $0 - 0 + 0 = 0$, så nullvektoren er med.
2. La $\mathbf{v} = (x_1, y_1, z_1)$ og $\mathbf{u} = (x_2, y_2, z_2)$ være løsninger av $x - y + z = 0$. Da er $x_1 - y_1 + z_1 = 0$ og $x_2 - y_2 + z_2 = 0$. Videre er $\mathbf{v} + \mathbf{u} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$. Dette må også være en løsning siden $(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = (x_1 - y_1 + z_1) + (x_2 - y_2 - z_2) = 0 + 0 = 0$. Så mengden er lukket under addisjon.
3. La $\mathbf{v} = (x, y, z)$ være en løsning, slik at $x - y + z$. Da er $c\mathbf{v} = (cx, cy, cz)$ også en løsning siden $cx - cy + cz = c \cdot (x - y + z) = c \cdot 0 = 0$. Så mengden er lukket under skalarmultiplikasjon.

Dermed er denne mengden et underrom av $\mathbb{C}^3$.

c) Ikke et underrom. Det kan vi se for eksempel ved at hvis (x_1, y_1, z_1) og (x_2, y_2, z_2) er løsninger, er $x_1 - y_1 + z_1 = 1$ og $x_2 - y_2 + z_2 = 1$, men $(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = 1 + 1 = 2 \neq 1$ er ikke en løsning. Så mengden er ikke lukket under addisjon.

d) Komplekst underrom betyr at vi henter skalarer fra $\mathbb{C}$. La oss undersøke skalarmultiplikasjon. La $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $c = i$. Da er $c\mathbf{v} = i \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix}$, som ikke er en vektor $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ der $a, b \in \mathbb{R}$. Dermed er ikke denne mengden et komplekst underrom av $\mathbb{C}^2$.

e) Reelt vektorrom betyr at vi henter skalarer fra $\mathbb{R}$.

1. Nullvektoren $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ er med siden $0 \in R$.
2. $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{bmatrix} \in L$.
3. $c \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca \\ cb \end{bmatrix} \in L$ for $c \in \mathbb{R}$.

Mengden L er et reelt underrom av $\mathbb{C}^2$.

7.2. Snittet er et underrom; unionen er ikke nødvendigvis et underrom.
Union: Det er mange moteksempler. Du kan f. eks ta to linjer i $\mathbb{R}^2$ som kun krysser hverandre i origo.
Snitt: U_1 og U_2 inneholder begge null-vektoren, og er begge lukket under vektorromsoperasjonene. Husk at x er i $U_1 \cap U_2$ hvis og bare hvis x er i både U_1 og U_2. Null-vektoren ligger i U_1 og U_2 og derfor i $U_1 \cap U_2$; summen av to vektorer i $U_1 \cap U_2$ ligger i både U_1 og U_2 siden både U_1 og U_2 er underrom; et skalarmultiplum av en vektor i $U_1 \cap U_2$ ligger også i både U_1 og U_2, igjen siden både U_1 og U_2 er underrom.

7.3.

a) La $M_{i,j}$ være $m \times n$-matrisen som har 1 i posisjon (i, j) og 0 ellers. Samlingen $M_{i,j}$, $i = 1, \ldots m$, $j = 1, \ldots n$ er en basis. Dimensjonen er antall element i en basis: mn.

b) U og W er underrom; V er ikke.

c) En basis for U består av matrisene $M_{i,i}$, for $i = 1, \ldots, n$.
Dimensjonen til U er derfor n.
En basis for W består av matrisene $M_{i,j} + M_{j,i}$ for $i > j$ og $M_{i,i}$ for $i = j$.
Hint: Element (i, j) må være likt som element (j, i) for symmetriske matriser, derfor inneholder $M_{i,j} + M_{j,i}$ akkurat den informasjonen du trenger.
Dimensjonen til W: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (vi trenger bare å telle elementene langs og under diagonalen).

7.4.

a) Vektorrommene $\mathcal{P}_n$, for forskjellige n, er underrom av hverandre på denne måten:

$$\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2 \subset \cdots$$

Vektorrommene $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$, for forskjellige n, er også underrom av hverandre, for alle funksjoner som er n ganger deriverbare er også $n - 1$ ganger deriverbare:

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}) \supset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \supset \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \supset \mathcal{C}^3(\mathbb{R}) \supset \cdots$$

For hver n har vi:

$$\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}(\mathbb{R})$$

Alle n-tegradspolynomer er polynomer; alle polynomer er uendelig mange ganger deriverbare; alle uendelig mange ganger deriverbare funksjoner er deriverbare n ganger; alle n ganger deriverbare funksjoner er kontinuerlige (deriverbar impliserer kontinuitet).

b) Du har vist at $\mathcal{P}_n$ har en endelig basis tidligere, og det er derfor endeligdimensjonalt. Vi har sett at $\mathcal{P}$ er uendeligdimensjonalt i notatet. Derfor er resten av vektorrommene uendeligdimensjonale; alle har et uendeligdimensjonalt underrom.

7.5.

a) Nei.
$\mathbb{Z}$ er ikke lukket under skalarmultiplikasjon: Hvis du multipliserer et heltall med et reelt tall får du ikke nødvendigvis et heltall. Eksempel: $\frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$ er ikke et heltall.

b) Nei.
La oss sjekke at $(ab) * n \neq a * (b * n)$ for passende valg av relle tall a og b, og heltall n.
Eksempel: $\lfloor \frac{1}{2} \cdot 1 \rfloor = 0$ slik at $2 * (\frac{1}{2} * 1) = 0$. Men

$$(2 \cdot \frac{1}{2}) * 1 = 1 * 1 = 1.$$

Merk: Vi viste altså at $\mathbb{Z}$ med denne skalarmultiplikasjonen umulig kan være et vektorrom. Mer generelt kan man vise at det ikke finnes noen vektorromstruktur på $\mathbb{Z}$. Dette henger sammen med at noen typer uendelig er større enn andre.

7.6.

a) For å svare på spørsmålet må vi utforske om det finnes konstanter a, b og c slik at

$$a \cos(x) + b \sin(x) + c \tan(x) = 0$$

for alle x i D. Velg $x = 0$ for å se at $a = 0$ ettersom $\sin(0) = 0$ og $\tan(0) = 0$. Vi har $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ som gir likningen

$$b \sin(x) = -c \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

for alle x i D . Sinus er aldri null for $x \neq 0$ i D slik at vi kan stryke $\sin(x)$ – på denne delen av D – og få likningen

$$\cos(x) = \frac{-c}{b}.$$

Men cosinus er helt klart ikke konstant for alle $x \neq 0$ i D, så det kan ikke finnes noen ikke-trivielle løsninger. Vektorene er altså lineært uavhengige.

b) Ja.
La E være ett punkt i D (du kan velge dette punktet vilkårlig). En funksjon fra ett punkt til $\mathbb{R}$ er essensielt det samme som et tall i $\mathbb{R}$, nemlig det tallet du sender punktet til. Vektorrommet $\mathcal{C}(E)$ blir slik essensielt vektorrommet $\mathbb{R}$. Tre vektorer (tall) i $\mathbb{R}$ er selvfølgelig lineært avhengige (vektorrommet er endimensjonalt). For å gjøre det helt konkret kan vi velge $E = \{1\}$. Da er $\sin(1) \cdot \cos(1) + (-\cos(1)) \cdot \sin(1) + 0 \cdot \tan(1) = 0$.

7.7.

a) Vi bruker det vi skal vise i c), nemlig at $c \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ for alle skalarer c. Dersom $c \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ og $c \neq 0$ bruker vi c^{-1}, og aksiom V5 og V6 og beregner:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = 1 \cdot \mathbf{v} = \left(\frac{1}{c} c\right) \cdot \mathbf{v} &= \frac{1}{c} \cdot (c \cdot \mathbf{v}) \\ &= \frac{1}{c} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Vi konkluderer med at dersom $c \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ er $c = 0$ eller $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ eller begge deler.

b) Fra likheten $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ får du, ved å bruke aksiom (V2) på begge sider:

$$\mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{u}$$

Vi vet fra aksiom (V4) at $\mathbf{u}$ har en additiv invers $-\mathbf{u}$. Legg til denne på hver side av likheten over; da får du:

$$(\mathbf{v} + \mathbf{u}) + (-\mathbf{u}) = (\mathbf{w} + \mathbf{u}) + (-\mathbf{u})$$

Bruk aksiom (V1) på begge sider:

$$\mathbf{v} + (\mathbf{u} + (-\mathbf{u})) = \mathbf{w} + (\mathbf{u} + (-\mathbf{u}))$$

Bruk aksiom (V4):

$$\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{w} + \mathbf{0}$$

Bruk aksiom (V3):

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}$$

c)
Vi bruker V3 og V7:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} + c \cdot \mathbf{0} &= c \cdot (\mathbf{0} + \mathbf{0}) \\ &= c \cdot \mathbf{0} + c \cdot \mathbf{0} \end{aligned}$$

Nå bruker vi resultatet fra b) til å konkludere med at $c \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

d) Vi bruker aksiom V6 og V8:

$$(-1)\mathbf{v} + \mathbf{v} = (-1)\mathbf{v} + 1 \cdot \mathbf{v} = (-1 + 1) \cdot \mathbf{v} = 0 \cdot \mathbf{v}$$

Vi må vise $0 \cdot \mathbf{v} = 0$. Vi beregner med aksiom V8 og V3:

$$\mathbf{0} + 0 \cdot \mathbf{v} = (0 + 0) \cdot \mathbf{v} = 0 \cdot \mathbf{v} + 0 \cdot \mathbf{v}$$

Bruk **b)** til å dedusere $\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{v}$. Vi har altså $(-1)\mathbf{v} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$, og dermed får vi $(-1) \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{v}$ ved å anvende **b)** på $(-1)\mathbf{v} + \mathbf{v} = \mathbf{0} = -\mathbf{v} + \mathbf{v}$.

7.8.

a) En naturlig basis for $\mathcal{P}_n$ er gitt av $1, x \ldots, x^n$. Dette er akkurat hva vi trenger for å få alle n-tegradspolynom. Basert på dette virker det rimelig at $\mathscr{B} = \{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ er en basis for $\mathcal{P}$ (da burde vi akkurat ha det vi trenger for å få alle polynomer av vilkårlig grad).

b) Spenner ut: Et vilkårlig polynom kan skrives på formen $a_0 x^0 + a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n$. Men dette polynomet er automatisk en lineærkombinasjon av $x^0, x^1, \ldots, x^n$ som er en delmengde av $\mathscr{B}$.
Lineært uavhengig: Vi må vise at likningen

$$a_0 x^0 + a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n = 0,$$

kun har den trivielle løsningen for koeffisientene a_i. Men gitt reelle tall $a_0, \cdots, a_n$, er venstre siden av likningen et polynom av grad $\leqslant n$. Dersom polynomet er av ekte grad $k > 0$, dvs $a_k \neq 0$ og $a_m = 0$ for $m > k$, har venstre side ikke mer enn k nullpunkter for x, mens høgre opplagt har uendelig mange nullpunkter. Den eneste måten likheten kan holde for alle verdier av x er derfor om $a_i = 0$ for alle i. Det vil si, likningen har bare den trivielle løsningen og $\mathscr{B}$ er Lineært uavhengig.
Vi har sett at $\mathscr{B}$ er lineært uavhengig og spenner ut $\mathcal{P}$. Det er definisjonen av å være basis for $\mathcal{P}$.

Eksamensoppgaver

Høst 2017: Oppgave 2
Høst 2018: Oppgave 8
Vår 2019: Oppgave 1
Kont 2019: Oppgave 2ab