

Løsningsforslag øving 6

8.1. Husk at en funksjon er injektiv dersom $x \neq y$ gir $f(x) \neq f(y)$, men her ser vi at $f(3) = 9 = f(-3)$, eller generelt at $f(z) = z^2 = f(-z)$ for alle $z \in \mathbb{C}$, som betyr at f ikke er injektiv. Vi ser også at f er på formen z^n for et heltall n , og vi vet fra tidligere at alle funksjoner $z^n = w$, for komplekse tall z og w og heltall n , ifølge algebraens fundamentalteoreme har en løsning. Dette betyr at for en gitt w så kan vi finne en z slik at $f(z) = w$. Dette betyr at f er surjektiv. Til slutt observerer vi at f ikke er bijektiv fordi f ikke er injektiv, da en funksjon må være både injektiv og surjektiv for å være bijektiv.

8.2. Vi kaller $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ en lineærtransformasjon dersom $T(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = aT(\mathbf{x}) + bT(\mathbf{y})$ for alle skalarer $a, b \in \mathbb{R}$ og alle vektorer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Vi sjekker om dette stemmer i hvert av punktene under. I de tilfellene hvor T ikke er en lineærtransformasjon så er det godt nok å gi et moteksempel hvor $T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \neq T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$ eller $T(a\mathbf{x}) \neq aT(\mathbf{x})$, enten generelt eller for noen utvalgte skalarer a og vektorer $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$.

a) Dette er ikke en lineærtransformasjon. Vi ser at

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} \tan(x) \\ e^y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tan(z) \\ e^w \end{bmatrix} \\ &\neq \begin{bmatrix} \tan(z+w) \\ e^{z+w} \end{bmatrix} \\ &= T\left(\begin{bmatrix} x+z \\ y+w \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

b) Dette er en lineærtransformasjon. Vi ser at

$$\begin{aligned} aT\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) + bT\left(\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}\right) &= a(2x + y) + b(2z + w) \\ &= 2(ax) + (ay) + 2(bz) + (bw) \\ &= T\left(a\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

Dermed går vi videre. Standardmatrisen A til lineærtransformasjonen T er

$$A = [T(\mathbf{e}_1) \quad T(\mathbf{e}_2)] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

For å finne kjernen til T så løser vi ligningssystemet $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = \mathbf{0}$, som gir oss at $2x + y = 0$, som igjen betyr at $2x = -y$. Det følger at

$$\ker T = \left\{ \begin{bmatrix} -a \\ 2a \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\},$$

og dermed også at T ikke er injektiv.

Vi ser at bildet til T er et underrom av $\mathbb{R}$. Men spenner det ut hele $\mathbb{R}$? Vi lar a være et vilkårlig element

fra $\mathbb{R}$, og sjekker om vi kan finne en vektor $\mathbf{v}$ slik at $T(\mathbf{v}) = a$. Det kan vi, ved å for eksempel sette $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}$. Det følger at $\text{im } T = \mathbb{R}$, og dermed også at T er surjektiv.

c) Dette er ikke en lineærtransformasjon. Vi ser at

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 1, \text{ og at } T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 3,$$

som gir at

$$2T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 2 \neq 3 = T\left(2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right).$$

d) Dette er ikke en lineærtransformasjon. Vi ser at

$$\begin{aligned} 2T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= 2(1^2 + 0^2) \\ &= 2 \\ &\neq 2^2 + 0^2 \\ &= T\left(2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

e) Dette er en lineærtransformasjon. Vi ser at

$$\begin{aligned} aT\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) + bT\left(\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}\right) &= a\begin{bmatrix} x - 5y + 4z \\ y - 6z \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} u - 5v + 4w \\ v - 6w \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ax - 5ay + 4az \\ ay - 6az \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bu - 5bv + 4bw \\ bv - 6bw \end{bmatrix} \\ &= T\left(a\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

Dermed går vi videre. Standardmatrisen A til lineærtransformasjonen T er

$$A = [T(\mathbf{e}_1) \quad T(\mathbf{e}_2) \quad T(\mathbf{e}_3)] = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}.$$

For å finne kjernen til T så løser vi ligningssystemet $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Vi ser at vi får en fri variabel, og at $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 26 & 6 & 1 \end{bmatrix}^T$ er en løsning. Det følger at $\ker T = \text{Sp}\{\begin{bmatrix} 26 & 6 & 1 \end{bmatrix}^T\}$, og dermed også at T ikke er injektiv.

Bildet til T er rommet utspent av kolonnene til A . Opplagt er dette hele $\mathbb{R}^2$. Vi gir tre bevis: Ved å regne ut at determinanten til $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ er ulik 0 ser vi at de to første kolonnene til A allerede spenner ut $\mathbb{R}^2$.

Alternativt kan vi bruke at vi vet at nullrommet til A har dimensjon 1, sammen med teorem 7.27 til å regne ut at kolonnerommet har dimensjon $3 - 1 = 2$. Det eneste underrommet av $\mathbb{R}^2$ som har dimensjon 2 er $\mathbb{R}^2$ selv. En siste fremgangsmåte er å la $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}^T$ være et vilkårlig element fra $\mathbb{R}^2$, og sjekke om vi kan finne en vektor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$ i $\mathbb{R}^3$ slik at $T(\mathbf{v}) = \mathbf{y}$. Det kan vi, ved å for eksempel sette $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a + 5b & b & 0 \end{bmatrix}^T$. Hvert av disse tre argumentene beviser at T er surjektiv.

f) Dette er en lineærtransformasjon. Sjekk at beregningene stemmer. Standardmatrisen A til lineærtransformasjonen T er

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kjernen til T er $\ker T = \text{Sp}\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \}$. T er dermed ikke injektiv. Fra teorem 7.27 ser vi at bildet til T har dimensjon $4 - 1 = 3$. Det er uansett opplagt at T ikke er surjektiv ettersom første element i hver vektor i bildet til T må være 0, så det er uansett opplagt at $\dim \text{im} T \leq 3$. Det er også klart at kolonne 1, 2 og 3 er lineært uavhengige, for det $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$. Dermed danner kolonne 1, 2 og 3 basis for $\text{im} T$ som kan uttrykkes $\text{im} T = \{ [0, a, b, c]^T \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}$.

8.3. For å sette opp ligningen vi skal løse bruker vi standardmatrisen til T til å uttrykke $T \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right)$.

$$T \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x - 2y \\ -x + 3y \\ 3x - 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Radreduksjon gir $x = 5$ og $y = 3$. Løsningen er altså $T([5 \ 3]^T) = [-1 \ 4 \ 9]^T$.

8.4. La vektoren $\mathbf{x}$ i basis $\mathcal{B}$ og basis $\mathcal{C}$ være henholdsvis

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \text{ og } [\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Dette er ekvivalent med

$$\mathbf{x} = b_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + b_2 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{x} = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Da må

$$b_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + b_2 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dette er et ligningssystem med to ukjente: c_1 og c_2 (hvis vi kjenner b_1 og b_2), og vi ønsker å finne matrisen A slik at $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$. Systemet på matriseform er

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 13/24 & 7/24 \\ 0 & 1 & 7/24 & 13/24 \end{bmatrix}.$$

Det betyr at $c_1 = \frac{13b_1 + 7b_2}{24}$ og $c_2 = \frac{7b_1 + 13b_2}{24}$, eller at

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 7 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Videre betyr dette at

$$A = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 7 & 13 \end{bmatrix}.$$

Tilsvarende kan vi finne

$$B = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -13 & 7 \\ 7 & -13 \end{bmatrix}.$$

8.5.

a) Dette er standardbasen 1, x og x^2 .

Forklaring: Vi ønsker å skrive et vilkårlig andregradspolynom på formen $p(x) = p(0)f_1(x) + p'(0)f_2(x) + \frac{p''(0)}{2}f_3(x)$. Dette er akkurat hva $f_1 = 1$, $f_2 = x$ og $f_3 = x^2$ tilfredstiller: Gitt $p(x) = a + bx + cx^2$ ser vi at $p(0) = a$, $p'(0) = b$ og $\frac{p''(0)}{2} = c$ ved regning; dette er akkurat koeffisientene foran 1, x og x^2 . Alternativ løsning: For en mer systematisk fremgangsmåte kan du følge metoden som er beskrevet i del b).

b) Vi må finne tre polynom $e_1(x)$, $e_2(x)$ og $e_3(x)$ som utgjør en basis slik at et vilkårlig polynom kan skrives på formen $p(x) = p(0)e_1(x) + p(1)e_2(x) + p(2)e_3(x)$

(da blir koordinatene $\begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{bmatrix}$). Dette skjer akkurat

dersom $e_1(x)$ tilfredstiller

$$e_1(0) = 1 \quad e_1(1) = 0 \quad e_1(2) = 0,$$

$e_2(x)$ tilfredstiller

$$e_2(0) = 0 \quad e_2(1) = 1 \quad e_2(2) = 0,$$

$e_3(x)$ tilfredstiller

$$e_3(0) = 0 \quad e_3(1) = 0 \quad e_3(2) = 1$$

(sett inn i likningen for $p(x)$ uttrykt ved e_i 'ene for å se dette).

e_1 : Polynomet kan skrives på formen $a_0 + a_1x + a_2x^2$, og vi krever – fra likningene for e_1 – ovenfor at

$$a_0 = 1 \quad a_0 + a_1 + a_2 = 0 \quad a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0.$$

Dette er tre likninger med tre ukjente, og vi bruker radreduksjon for å se at løsningen er $a_0 = 1$, $a_1 = -\frac{3}{2}$ og $a_2 = \frac{1}{2}$. Polynomet er derfor $e_1(x) = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2$. Alternativ løsning: $e_1(1) = 0$ og $e_1(2) = 0$ betyr at $(x - 1)$ og $(x - 2)$ er faktorer av e_1 . Derfor må $e_1(x) = a(x - 1)(x - 2)$. Kravet $e_1(0) = 1$ gir nå $1 = a \cdot (-1) \cdot (-2)$ slik at $a = \frac{1}{2}$. Derfor er $e_1(x) = \frac{1}{2}(x - 1)(x - 2)$. Du kan gange ut for å se at dette er det samme polynomet som vi fant ovenfor.

e_2 : Samme fremgangsmåte som for e_1 – med litt forskjellige likninger – gir polynomet $e_2(x) = 2x - x^2$.

e_3 : Samme fremgangsmåte som for e_1 – med litt forskjellige likninger – gir polynomet $e_3(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2$.

Vi har nå tre polynom e_1 , e_2 og e_3 som spenner $\mathcal{P}_2$ (det er konstruert slik at alle polynom kan skrives

$p(x) = p(0)e_1(x) + p(1)e_2(x) + p(2)e_3(x)$. De er da automatisk lineært uavhengige siden $\dim \mathcal{P}_2 = 3$.

c) Koordinatene til x^2 :

$$[x^2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} p(0) \\ p'(0) \\ \frac{p''(0)}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$[x^2]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

d) Husk at en 3×3 -matrise er bestemt av hvordan den endrer standardbasen i $\mathbb{R}^3$.

T : I koordinatene til standardbasen for $\mathcal{P}_2$ har vi at $[1]_{\mathcal{B}} = \mathbf{e}_1$, $[x]_{\mathcal{B}} = \mathbf{e}_2$ og $[x^2]_{\mathcal{B}} = \mathbf{e}_3$, hvor $\mathbf{e}_i$ er den i -te standardbasen for $\mathbb{R}^3$, per definisjon av koordinater til en basis. Fra kommentaren ovenfor må vi ha at $T[1]_{\mathcal{B}} = [1]_{\mathcal{C}}$, $T[x]_{\mathcal{B}} = [x]_{\mathcal{C}}$, $T[x^2]_{\mathcal{B}} = [x^2]_{\mathcal{C}}$. Basen $\mathcal{C}$ er konstruert slik at første koordinat er evaluering i 0, andre koordinat er evaluering i 1 og tredje koordinat er evaluering i 2. Derfor har vi

$$T = [T\mathbf{e}_1 \quad T\mathbf{e}_2 \quad T\mathbf{e}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

S : Samme fremgang som for T . Husk at $e_1(x) = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2$, $e_2(x) = 2x - x^2$ og $e_3(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2$.

I koordinatene til $\mathcal{B}$ har vi da at $[e_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$,

$[e_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $[e_3]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Dette gir

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Vi sjekker at matrisen gir riktig endring av koordinater for x^2 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dette viser at S endrer koordinatene til x^2 som ønsket. Gjør tilsvarende regning for T , eller vis at T og S er inverser ved å multiplisere de sammen og få I_3 .

8.6.

a)

$$[T_{\theta}] = [T_{\theta}(\mathbf{e}_1) \quad T_{\theta}(\mathbf{e}_2)] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

b) Å bruke T_{θ} to ganger svarer til å rotere med en vinkel θ to ganger: $T_{\theta} \circ T_{\theta} = T_{2\theta}$. På matrisiform har vi derfor

$$[T_{2\theta}] = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{bmatrix}.$$

Vi kan også regne ut dette produktet direkte:

$$[T_{\theta}]^2 = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) & -2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ 2\cos(\theta)\sin(\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{bmatrix}.$$

Fra element $(1, 1)$, eller $(2, 2)$, ser vi at $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$.

8.7. Poenget med denne oppgaven er å se noen større sammenhenger i lineæralgebra. Det er mange måter å vise disse sammenhengene, og det er viktig at implikasjonene går i begge retninger for hvert av punktene.

(I) **a) $\Leftrightarrow$ f).** Per definisjon i kapittel 8 om isomorfier er T en isomorfi hvis og bare hvis det finnes en invers $S: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ slik at $T \circ S = \text{id}_{\mathbb{C}^n}$ og $S \circ T = \text{id}_{\mathbb{C}^n}$. La B være standardmatrisen til S . Fordi standardmatrisen til $\text{id}_{\mathbb{C}^n}$ er I_n får vi

$$AB = I_n = BA.$$

Det betyr at B må være den inverse matrisen A^{-1} til A .

Og omvendt, dersom A er inverterbar, så definerer A^{-1} en lineærtransformasjon $S: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ som er invers til T .

(II) **a) $\Leftrightarrow$ b).** Dette følger fra teorem 6.12. Se bevis i notatene. Merk at dette beviset kun er gyldig for A en $n \times n$ matrise, og ikke generelt.

(III) **b) $\Leftrightarrow$ c).** Dette følger fra teorem 5.14. Se bevis i notatene.

(IV) **b) $\Leftrightarrow$ d).** Dette følger fra teorem 8.14.2. Bevis:

La $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ være kolonnene i A , og anta at er lineært uavhengige. Se på ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Husk at $A\mathbf{x} = x_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \dots + x_n \cdot \mathbf{a}_n$. Ettersom kolonnene er lineært uavhengige, så impliserer ligningen

$$A\mathbf{x} = x_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \dots + x_n \cdot \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

at $x_1 = \dots = x_n = 0$. Dette betyr at nullrommet til A kun består av nullvektoren. Ettersom A er standardmatrisen til T så er nullrommet til A det samme som kjernen til T . Vi vet så fra teorem 8.9 (se bevis i notatene) at en lineærtransformasjon er injektiv hvis og bare hvis kjernen kun består av nullvektoren. Dermed følger det at T er injektiv hvis og bare hvis kolonnene i A er lineært uavhengige.

(V) **c) $\Leftrightarrow$ e).** Dette er resultatet i teorem 8.14.1. Bevis:

(i) **c) $\Rightarrow$ e).** La $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ være kolonnene i A , og anta at de spenner ut hele $\mathbb{C}^n$. La så $\mathbf{u}$ være et vilkårlig element i $\mathbb{C}^n$. Fordi kolonnene i A spenner ut hele $\mathbb{C}^n$, så vet vi at ethvert element i $\mathbb{C}^n$ kan skrives som en lineærkombinasjon av kolonnene i A . Da må det eksistere skalarer $c_1, c_2, \dots, c_n$ i $\mathbb{C}^n$, hvor ikke alle er lik null, slik at $c_1 \cdot \mathbf{a}_1 + c_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \dots + c_n \cdot \mathbf{a}_n = \mathbf{u}$. Det betyr at

$$c_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \dots + c_n \cdot \mathbf{a}_n = A\mathbf{c} = \mathbf{u}$$

der vi skriver $\mathbf{c}$ for kolonnevektoren med koordinatene $c_1, \dots, c_n$. Fordi A er standardmatrisen til T , har vi $A\mathbf{c} = T(\mathbf{c})$. Da har vi vist at T kan nå alle elementer i $\mathbb{C}^n$, og dermed er T surjektiv.

- (ii) **c) $\Leftarrow$ e).** La T være surjektiv. Da har vi at T kan nå alle elementer i $\mathbb{C}^n$. Det betyr at hvis $\mathbf{w}$ er en vektor i $\mathbb{C}^n$, så finnes det en vektor $\mathbf{u}$ med $T(\mathbf{u}) = \mathbf{w}$. Ettersom A er standardmatrisen til T så betyr dette at $A\mathbf{u} = \mathbf{w}$. Vi kan skrive dette igjen som

$$A\mathbf{u} = u_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \dots + u_n \cdot \mathbf{a}_n = \mathbf{w}$$

der $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ er kolonnene i A og $u_1, \dots, u_n$ er koordinatene i $\mathbf{u}$. Dette betyr at kolonnene til A spanner ut hele $\mathbb{C}^n$.

Vi har dermed vist at alle påstandene er ekvivalente. Merk at en lineærtransformasjon $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ er injektiv hvis og bare hvis T er surjektiv ettersom definisjonsområdet og verdiorrådet har samme dimensjon. Se figur på neste side for en oversikt over sammenhengene.

8.8.

a) T må være injektiv, og S må være surjektiv. Merk at dette ikke egentlig bruker den lineære strukturen, men er sant for generelle funksjoner: Dersom $f \circ g$ er bijektiv må g være injektiv og f surjektiv.

b) Vi får at $\dim U = \dim W$ siden $U \cong W$, og $\dim V \geq \dim U$ siden T er injektiv (eller $\dim V \geq \dim W$ siden S er surjektiv). Det finnes mange ulike bevis for denne ulikheten. Man kan for eksempel bruke teorem 7.27 på en matrise som representerer T (eller S).

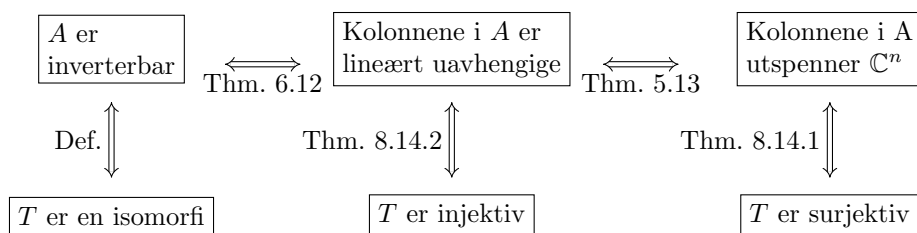
Intuitivt gir det kanskje mening at dersom vi går fra et lite rom til et stort rom, så kan vi ikke treffe alle elementene. I tillegg, dersom vi går fra et stort rom til et lite rom så vil vi nødvendigvis treffe noen elementer flere ganger.

Eksamensoppgaver

Høst 2018: Oppgave 9

Kont 2019: Oppgave 3

Høst 2019: Oppgave 5cd



Figur 0.1: Sammenhengene mellom bevis av påstander i oppgave 8.7.