Løsningsforslag øving 13

14.1. La $v = y'$. Vi bruker oppsettet på side 2 i notatet om andreordens differensialligninger (kapittel 14).

a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}'$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}'$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}'$

14.2.

a) Vi setter opp systemet på samme måte som i forrige oppgave:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}'.$$

Vi finner egenverdiene til matrisen ved å løse ligningen $\det(\lambda I - A) = 0$.

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -2 & \lambda - 1 \end{bmatrix}\right) = \lambda(\lambda - 1) - 2 \\ &= \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \end{aligned}$$

Ved å bruke abc-formelen får vi

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}.$$

Med andre ord har matrisen egenverdiene

$$\lambda_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \text{ og } \lambda_2 = \frac{1-3}{2} = -1.$$

Det følger at den generelle løsningen er

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}$$

.

b) Vi setter opp systemet på samme måte som i forrige oppgave:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}'.$$

Strategien er den samme som i forrige deloppgave. Karakteristisk polynom er

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 1$$

som har røttene $\lambda_1 = i$ og $\lambda_2 = -i$. Siden egenverdiene er komplekse, følger det at den generelle løsningen er

$$y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t).$$

14.3. I begge deloppgavene bruker vi at hvis

$$y_h(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

er en løsning av ligningen

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0,$$

så vil en partikulærløsning av ligningen

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t)$$

være

$$\begin{aligned} y_p(t) = y_2 &\int \frac{y_1(t) f(t)}{y_1(t) y_2'(t) - y_2(t) y_1'(t)} dt \\ - y_1 &\int \frac{y_2(t) f(t)}{y_1(t) y_2'(t) - y_2(t) y_1'(t)} dt. \end{aligned}$$

a) Vi vet fra forrige oppgave at en homogen løsning av

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = te^t$$

er

$$y_h(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}.$$

Dermed får vi $f(t) = te^t, y_1(t) = e^{2t}, y_2(t) = e^{-t}, y_1'(t) = 2e^{2t}$ og $y_2'(t) = -e^{-t}$. Innsatt i formelen for $y_p(t)$ får vi

$$\begin{aligned} y_p(t) &= e^{-t} \int \frac{e^{2t} \cdot te^t}{-e^{2t}e^{-t} - 2e^{-t}e^{2t}} dt \\ &\quad - e^{2t} \int \frac{e^{-t} \cdot te^t}{-e^{2t}e^{-t} - 2e^{-t}e^{2t}} dt \\ &= -\frac{e^{-t}}{3} \int te^{2t} dt + \frac{e^{2t}}{3} \int te^{-t} dt \\ &\overset{(*)}{=} -\frac{e^{-t}}{3} \left(\frac{1}{2} te^{2t} - \int \frac{1}{2} e^{2t} dt \right) \\ &\quad + \frac{e^{2t}}{3} \left(-te^{-t} + \int e^{-t} dt \right) \\ &= -\frac{1}{2} te^t - \frac{1}{4} e^t. \end{aligned}$$

Ved likhetstegnet merket med $(*)$ er det brukt delvis integrasjon.

b) Vi vet fra forrige oppgave at en homogen løsning av

$$y''(t) + y(t) = \cos(t)$$

er

$$y_h(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t).$$

Dermed får vi $f(t) = \cos(t), y_1(t) = \cos(t), y_2(t) = \sin(t), y_1'(t) = -\sin(t)$ og $y_2'(t) = \cos(t)$. Innsatt i formelen for $y_p(t)$ får vi

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \sin(t)\int \frac{\cos^2(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)}dt \\ &- \cos(t)\int \frac{\sin(t)\cos(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)}dt \\ &= \sin(t)\int \cos^2(t)dt \\ &- \cos(t)\int \sin(t)\cos(t)dt \\ &= \sin(t)\int \frac{1}{2}\Big(\cos(2t)+1\Big)dt \\ &- \cos(t)\int \frac{1}{2}\sin(2t)dt \\ &= \frac{1}{4}\cos(t) + \frac{1}{2}t\sin(t). \end{aligned}$$

$\frac{1}{4}\cos(t)$ er en homogen løsning og partikulærløsningen er dermed $y_p(t) = \frac{1}{2}t\sin t$.

14.4.

a) Fra oppgave 14.2 har vi den generelle løsningen $y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-t}$. Dette gir oss at $y(0) = c_1 + c_2 = 0$, og dermed at $c_1 = -c_2$. Vi deriverer den generelle løsningen og får at $y'(t) = 2c_1e^{2t} - c_2e^{-t}$. Dette gir oss at $y'(0) = 2c_1 - c_2 = 1$. Vi kombinerer de to resultatene og får at $2c_1 + c_1 = 1$ som igjen gir oss at $c_1 = 1/3$. Da følger det også at $c_2 = -1/3$. Den endelige løsningen er $y(t) = \frac{1}{3}(e^{2t} - e^{-t})$.

b) Fra oppgave 14.2 har vi den generelle løsningen $y(t) = c_1\cos(t) + c_2\sin(t)$. Dette gir oss at $y(\pi/2) = c_2 = 1$. Vi deriverer den generelle løsningen og får at $y'(t) = -c_1\sin(t) + c_2\cos(t)$. Dette gir oss at $y'(\pi/2) = -c_1 = 0$. Vi kombinerer de to resultatene og får at den endelige løsningen er $y = \sin(t)$.

14.5.

a) Fra oppgave 14.2 har vi den generelle løsningen $y(t) = c_1\cos(t) + c_2\sin(t)$. Vi bruker følgende trigonometriske identitet:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta),$$

og får at

$$\cos(t+2) = \cos(t)\cos(2) - \sin(t)\sin(2).$$

Vi ser at denne løsningen er på riktig form, med $c_1 = \cos(2)$ og $c_2 = -\sin(2)$, og konkluderer med at $\cos(t+2)$ ligger i løsningsrommet.

b) Fra forrige deloppgave fikk vi at

$$\cos(t+2) = \cos(t)\cos(2) - \sin(t)\sin(2).$$

Dersom vi setter $c_1 = \cos(2)$ og $c_2 = -\sin(2)$, så får vi koordinatene til $\cos(t+2)$ med hensyn på basisen til løsningsrommet.

Eksamensoppgaver

Vår 2017: Oppgave 2

Vår 2017: Oppgave 3
Høst 2017: Oppgave 4
Kont 2018: Oppgave 7
Vår 2018: Oppgave 7
Høst 2019: Oppgave 2