

# Anbefalte oppgaver 5

## Oppgaver til kapittel 7

1. Svar med begrunnelse på følgende spørsmål:

a) Er mengden

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid a \geq 0, b \geq 0 \right\}$$

et underrom av  $\mathbb{R}^2$ ?

b) Er mengden av alle løsninger  $(x, y, z)$  i  $\mathbb{C}^3$  av ligningen

$$x - y + z = 0$$

et underrom av  $\mathbb{C}^3$ ?

c) Er mengden av alle løsninger  $(x, y, z)$  i  $\mathbb{C}^3$  av ligningen

$$x - y + z = 1$$

et underrom av  $\mathbb{C}^3$ ?

d) Er mengden

$$L = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2 \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

et *komplekst* underrom av  $\mathbb{C}^2$ ?

e) Hvis vi oppfatter  $\mathbb{C}^2$  som et reelt vektorrom. Er mengden

$$L = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2 \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

et *reelt* underrom av  $\mathbb{C}^2$ ?

2. La  $V$  være et vektorrom, og la  $U_1$  og  $U_2$  være to underrom av  $V$ . Hvilke av følgende påstander kan vi da konkludere med?

a) Snittet  $U_1 \cap U_2$  er et underrom av  $V$ .

b) Unionen  $U_1 \cup U_2$  er et underrom av  $V$ .

3.

a) Finn en basis for vektorrommet  $\mathcal{M}_{m \times n}$ . Hva er dimensjonen?

b) Se på følgende delmengder av  $\mathcal{M}_n$ :

$U$ : alle diagonalmatriser

$V$ : alle inverterbare matriser

$W$ : alle matriser  $A$  slik at  $A = A^T$

Hvilke av disse mengdene er underrom av  $\mathcal{M}_n$ ? (En diagonalmatrise er en matrise der alt utenfor diagonalen er null. Enhetsmatrisen er et eksempel.)

c) For de mengdene i del b) som er underrom, hva er dimensjonen?

4.

a) Forklar hvilke av vektorrommene

$\mathcal{P}_n$  (for forskjellige  $n$ )

$\mathcal{P}$

$\mathcal{C}(\mathbb{R})$

$\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$  (for forskjellige  $n$ )

$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

som er underrom av hverandre.

b) Hvilke av vektorrommene i a) er endeligdimensjonale? Hvilke er uendeligdimensjonale?

5. Vi skriver

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

for mengden av heltall.

a) Hvis vi tenker på elementene i vektorrommet  $\mathbb{R}^1$  som bare tall, kan vi se på  $\mathbb{Z}$  som en delmengde av  $\mathbb{R}^1$ . Er  $\mathbb{Z}$  et underrom av  $\mathbb{R}^1$ ?

b) Nå prøver vi å gjøre  $\mathbb{Z}$  til et vektorrom ved å definere vektoraddisjon og skalarmultiplikasjon direkte. Definer vektoraddisjon som vanlig addisjon av tall, og definer skalarmultiplikasjon av et reelt tall  $r$  og et heltall  $n$  ved

$$r * n = \lfloor rn \rfloor,$$

der uttrykket  $\lfloor rn \rfloor$  betyr tallet  $rn$  rundet ned til et heltall. (Vi bruker symbolet  $*$  for skalarmultiplikasjonen her for å ikke blande den sammen med vanlig multiplikasjon av tall.)

Er  $\mathbb{Z}$  – med disse operasjonene – et vektorrom?

6. La mengden  $D$  være det åpne intervallet mellom  $-\pi/2$  og  $\pi/2$ :

$$D = \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

Se på funksjonene  $\sin$ ,  $\cos$  og  $\tan$  som vektorer i  $\mathcal{C}(D)$ .

a) Er de lineært uavhengige?

b) Kan du få et annet svar ved å isteden se på dem som vektorer i  $\mathcal{C}(E)$ , der  $E$  er en delmengde av  $D$ ?

7. La  $V$  være et vektorrom. Vis at følgende påstander følger fra vektorromsaksiomene.

a) Hvis  $c \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , så må vi ha enten  $c = 0$  eller  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  (eller begge).

b) Hvis  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$  for tre vektorer  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  og  $\mathbf{w}$  i  $V$ , så følger det at  $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ .

c)  $c \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$  for all skalarer  $c$ .

d)  $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$  for alle vektorer  $\mathbf{v}$ .

## 8. Utfordring

Vi har kun definert hva en basis er for endeligdimensjonale vektorrom. For å definere en basis til et uendeligdimensjonalt vektorrom, må vi først forstå hva i) spenne ut og ii) lineær uavhengighet skal bety for uendelige mengder.

Hvis  $S$  er en uendelig mengde av vektorer i et vektorrom  $V$ , så definerer vi følgende:

- i) Vi sier at  $S$  *spenner ut*  $V$  dersom enhver vektor  $\mathbf{v}$  i  $V$  kan skrives som en lineærkombinasjon av et endelig antall vektorer i  $S$ .
- ii) Vi sier at  $S$  er *lineært uavhengig* dersom enhver likning

$$x_1 \mathbf{s}_1 + \dots + x_n \mathbf{s}_n = \mathbf{0}$$

(hvor  $\mathbf{s}_i$ -ene er vektorer i  $S$ ) kun har den trivielle løsningen  $x_i = 0$  for alle  $i$ .

Nå kan vi definere en basis for vilkårlige vektorrom: En delmengde  $\mathcal{B}$  av et vektorrom  $V$  er en *basis* for  $V$  dersom den spenner ut  $V$  og er lineært uavhengig.

(Her definerer vi en basis som en mengde og ikke en liste, siden det blir vanskelig å ha en rekkefølge på basisvektorene når det kan være uendelig mange av dem.)

- a) Foreslå en basis for det uendeligdimensjonale vektorrommet  $\mathcal{P}$ .
- b) Vis at forslaget ditt er en basis.

## Eksamensoppgaver

Høst 2017: Oppgave 2

Høst 2018: Oppgave 8

Vår 2019: Oppgave 1

Kont 2019: Oppgave 2ab